2021 年 MMO 模拟赛

2021-12-24 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_335a8cc93f134d8d

1. 2022 盏不同的灯均匀分布在一个圆周上. 第一天，其中一部分的灯亮着. 在此后的任意一天，当且仅当某盏灯的左右两盏灯恰有一盏在前一天亮着时，该灯被点亮. 否则，它不被点亮.
   求第一天可以点亮的灯的所有可能方法数，使得在之后的每一天，亮着的灯的集合不同于第一天亮着的灯的集合.

2. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意 $x>2$，$y>3$，
   $$\frac{4f(x)f(y-3)}{f(y)f(x-2)+f(x)f(y-2)}$$
   为整数.

3. 设 $\triangle ABC$ 为不等边三角形. 有三个圆：第一个圆心在 BC 上且过点 A，第二个圆心在 CA 上且过点 B，第三个圆心在 AB 上且过点 C. 已知这三个圆有一条公共的根轴，求证：$\triangle ABC$ 的外心在这条根轴上.

4. $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω. D 在线段 BC 上，E 在 AC 上，使得 $ABDE$ 四点共圆；F 在 AB 上，使得 $ACDF$ 四点共圆. 直线 EF 和 BC 交于点 P. 点 Q 在 EF 上，满足 $QD\perp BC$. AQ 和 ω 交于另一点 R. 求证：当点 D 在 BC 上运动时，PR 和 ω 的交点为定点.

5. 设整系数多项式 $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 无整数根. 其导数 $P'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$，已知存在整系数多项式 $U(x)$，$V(x)$，使得
   $$U(x)P(x)-V(x)P'(x)=1$$
   对任意 x 恒成立. 且对任意 $x\in\mathbb{Z}$，$P(x)$ 的值均为奇数. 求证：存在无穷多个整数 n，使得不存在相异素数 p，q，满足 $(pq)^2\mid P(n)$.

6. 设 p 为素数. 开始时，K-pop 组合中有 p^4 个女孩. 在每周，所有女孩被平均分为 p^2 组，每组表演一个舞蹈. 请构造一个具体的安排方式，使得在 p^2+1 周后，每个女孩恰好与其他女孩均跳过一次舞（即被分到过同一组）.