一个恒等式与一个复数不等式

2021-05-10 原文链接

网站版本 3f6bf801342b · 文章 ID h_343488de3a180140

首先来看一个常见的恒等变形（以下分式变形均先假定所涉分母非零）：

$$x+y+z+2=xyz \iff \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$$

若将上式两端同除以 xyz 可得：

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}+\frac{2}{xyz}=1 \iff \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y}}+\frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}=1$$

将上式中的 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{y}$，$\frac{1}{z}$ 视作新的 x，y，z 可得：

$$xy+yz+zx+2xyz=1 \iff \frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=1$$

于是，只要找到和恒为 1 的三个关于 a，b，c 的轮换式，我们就可以将 $\frac{x}{x+1}$，$\frac{y}{y+1}$，$\frac{z}{z+1}$ 代换为这三个式子，从而得到一个三元恒等式．接下来开始寻找这样的轮换式．

事实上，我们有分式中的欧拉公式：

$$\sum_{cyc}\frac{a^r}{(a-b)(a-c)}$$

在 $r=0$ 或 1 时值为 0，在 $r=2$ 时值为 1，在 $r=3$ 时值为 $a+b+c$.

这里我们取 $r=2$ 时的情形.

可令 $\frac{x}{x+1}=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$，即

$$x=\frac{a^2}{bc-ab-ac}$$

同理令

$$y=\frac{b^2}{ca-ab-bc}$$

$$z=\frac{c^2}{ab-bc-ca}$$

在此情形下，必有恒等式

$$xy+yz+zx+2xyz=1.$$

上述推导先在 a,b,c 两两不同时进行；清去分母后得到多项式恒等式，故只要 x,y,z 有定义，最终恒等式仍成立.

有一道复数不等式就是以此为背景而命制的：

题目 已知 a，b，c 为复数．求证：

$$\sum_{cyc}\left|\frac{a^2}{ab-bc+ca}\right|\geq\frac{3}{2}.$$

其中分母均不为 0.

证明 设

$$x=\frac{a^2}{bc-ab-ac}$$
$$y=\frac{b^2}{ca-ab-bc}$$
$$z=\frac{c^2}{ab-bc-ca}$$

则

$$xy+yz+zx+2xyz=1$$

若 $|x|+|y|+|z|<\frac{3}{2}$. 则

$$\begin{aligned}&|xy+yz+zx|\\&\leq|x|\cdot|y|+|y|\cdot|z|+|z|\cdot|x|\\&\leq\frac{1}{3}(|x|+|y|+|z|)^2\\&<\frac{3}{4}\end{aligned}$$

且

$$|xyz|\leq\left(\frac{|x|+|y|+|z|}{3}\right)^3<\frac{1}{8}$$

这与

$xy+yz+zx+2xyz=1$ 矛盾.

故原不等式成立.