2021 年荷兰数学奥林匹克

2022-01-12 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_349258ee418d1590

1. Niek 有 16 块正方形卡片，每块的一面为黄色，另一面为红色. 他将卡片摆成一个 4×4 的大正方形，其中一些卡片黄色一面朝上，一些卡片红色一面朝上. 对于每种摆放方式，如下计算其 “单色性”. 对每一对有公共边的卡片，按如下规则分别记为 $+1$ 或 -1：如果两块有公共边的卡片颜色相同，则记为 $+1$；如果两块有公共边的卡片颜色不同，则记为 -1. 然后将所有得到的数全部相加（结果可能为负）. 例如，如果将卡片如下图摆放，则存在 15



对有公共边的卡片颜色相同，存在 9 对有公共边的卡片颜色不同. 因此，上图的 “单色性” 为：$15\cdot(+1)+9\cdot(-1)=6$. Niek 考察了所有卡片的摆放方法，并列出所有能取得的 “单色性” 的值.

(a) 求出 Niek 列出的数中最大的三个数，并说明理由.

(b) 求出 Niek 列出的数中最小的三个数，并说明理由.

(c) 求出 Niek 列出的数中最小的正数，并说明理由.

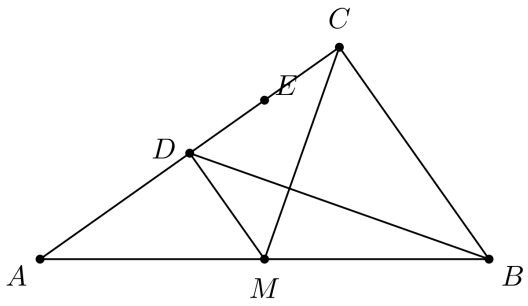
2. 有 $n(\geq 4)$ 支队伍参加一次比赛，其中每两支队伍至多进行一场比赛. 如果任意四支参赛队伍之间恰好进行了三场比赛，则称这次比赛是 “平衡的”. 求 n 的最大值，使得存在 n 支队伍参加的 “平衡的” 比赛.

3. 一只青蛙在平面上的网格点上跳来跳去，每次从一个网格点跳到另一个网格点. 青蛙从点 $(0,0)$ 出发，依次进行如下跳跃：水平方向跳跃 1 个单位长度，竖直方向跳跃 2 个单位长度，水平方向跳跃 3 个单位长度，竖直方向跳跃 4 个单位长度 $\cdots\cdots$ 求所有的正整数 n，使得青蛙能在 n 次跳跃后回到点 $(0,0)$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$. 点 M 为 AB 的中点，过 M 作 BC 的平行线交 AC 于点 D. CD 的中点为点 E，$BD\perp CM$. 求证：

(a)$\triangle CME$ 和 $\triangle ABD$ 相似.

(b)$EM\perp AB$.



1. 正整数 n 满足：对 n 的任意正约数 d，都有 $d+1 \mid n+1$. 求证：n 为素数.