温州二模多选压轴之尼姆博弈

2025-03-19　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3567fe19b70a4a3b

一、游戏规则与直觉探索

假设你和朋友玩这样一个游戏：
桌上有若干堆石子，两人轮流从任意一堆拿走至少一个石子，无法操作的人判负。
你会发现：

- **单堆情况**：先取者直接拿走所有石子获胜
- **两堆情况**：若两堆数量相同，后手总能模仿先手操作；若不同，先手可调整成相同数量

但面对三堆及以上时，直觉开始失效。这时需要引入数学工具。

二、二进制位的秘密武器

我们将每堆石子数转换为二进制，并按位对齐：

例如：3 堆石子数分别为 3（011）、4（100）、5（101）对齐后：

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

关键观察：逐列统计每列 1 的个数的奇偶性

- 若某列 1 的个数为奇数，标记为该列”失衡”
- 若所有列 1 的个数均为偶数，标记为”平衡态”

三、必胜策略的数学证明　核心定理：

- 平衡态（所有列 1 的个数为偶数）→ 后手必胜
- 非平衡态（存在某列 1 的个数为奇数）→ 先手必胜

推导过程：

初始状态为平衡态：

- 无论先手如何操作，必然打破某列平衡（减少某堆石子数）

- 后手可通过调整另一堆的对应位使整体恢复平衡

初始状态为非平衡态：

- 先手找到最高失衡列，选择该列有 1 的某堆
- 修改该堆石子数，使所有列恢复平衡
- 后续操作同 1，迫使后手进入必败态

四、异或运算的等价表述　上述平衡态判断可通过**异或运算**高效实现：

- 将所有堆的石子数进行异或（⊕）运算
- 若结果为 0 → 平衡态（后手必胜）
- 若结果非 0 → 非平衡态（先手必胜）

数学原理：
异或运算的本质是逐位求和后模 2，结果为 0 对应所有列 1 的个数为偶数。

五、温州二模题解析　题目：

11. 甲乙两人用《哪吒 2》动漫卡牌玩游戏．游戏开局时桌上有 n 盒动漫卡牌，每个盒子上都标有盒内卡牌的数量，每盒卡牌的数量构成数组 $(a_1, a_2, \cdots a_n)$，游戏规则如下：两人轮流抽牌，每人每次只能选择其中一盒并抽走至少一张卡牌，若轮到某人时无卡可抽，则该人输掉游戏．现由甲先抽，则下列开局中，能确保甲有必胜策略的是（Δ）
A. (1,3)　　B. (1,2,3)　　C. (3,3,6)　　D. (3,4,5)

选项分析：

选项	石子数	二进制表示	逐列统计（1 的个数）	异或结果	胜负判断
A	(1,3)	01, 11	列 1:1 个, 列 2:1 个	10	非平衡态
B	(1,2,3)	001, 010, 011	列 1:2 个, 列 2:2 个	0	平衡态
C	(3,3,6)	011, 011, 110	列 1:2 个, 列 2:3 个	110	非平衡态
D	(3,4,5)	011, 100, 101	列 1:2 个, 列 2:1 个	10	非平衡态

关键操作演示：

- **选项 C**：3⊕3⊕6=6≠0
  甲应将第三堆 6（110）调整为 6⊕6=0（000），变为 (3,3,0)

- **选项 D**：3⊕4⊕5=2≠0
  甲应将第一堆 3（011）调整为 3⊕2=1（001），变为 (1,4,5)

六、延伸思考　和尼姆博弈有关的一个象棋残局：

