加拿大 CRUX 杂志问题 4791-4800

2023-01-07 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_356ab123f7fc1fa0

4791.

设 $v_1, \cdots, v_n$ 均为 $\mathbb{C}^n$ 中的单位向量. 求证: 如果在 $\mathbb{C}^n$ 中所有的单位向量中, u 能使得 $\prod_{i=1}^{n} |v_i \cdot u|$ 取得最大值, 则对任意 i, $|v_i \cdot u| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

4792.

在 $\triangle ABC$ 中, 内心为 I, $\angle B$ 和 $\angle C$ 的内角平分线分别和对边 AC、AB 交于点 D、E. 若 $S_{BIC} = S_{AEID}$, 求证: $\angle A = 60^\circ$.

4793.

正偶数 a 和奇素数 p 满足 $\gcd(a^2-1, p) = 1$. 求证: $a^{n-1} - 1$ 能被 n 整除, 其中 $n = \frac{a^{2p}-1}{a^2-1}$.

4794.

设 $P(x) = x^2 + bx + 1$, 其中 b 为非负整数. 定义 $x_0 = 0$, 对任意整数 $i \geq 0$, $x_{i+1} = P(x_i)$. 求所有多项式 $P(x)$, 使得存在正整数 $n > 1$, 满足 $n \mid x_n$.

4795.

数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 定义如下: $x_1 = \frac{1}{9}, x_{n+1} = 9x_n^3, \forall n \geq 1, y_n = 9x_n^2 + 3x_n + 1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} y_1 \cdot y_2 \cdots y_n$ 的值.

4796.

不超过 1 的正实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. 求证:

$$\frac{a_1^2}{(1-a_1)^2} + \frac{a_2^2}{(1-a_2)^2} + \cdots + \frac{a_n^2}{(1-a_n)^2}$$
$$\geq \left(\frac{a_1}{1-a_1} + \frac{a_2}{1-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1-a_n} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \right)^2.$$

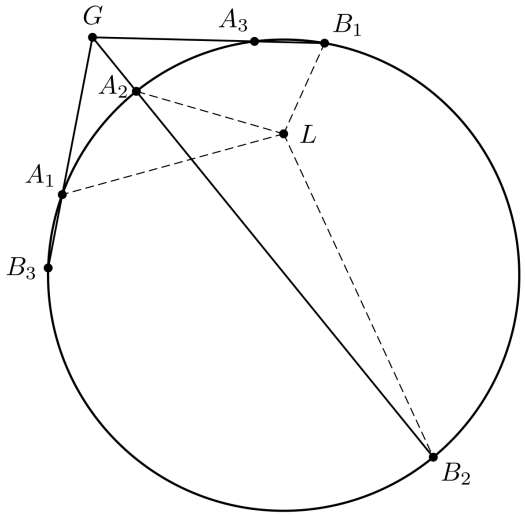
4797.

设 x, y, z 为正实数. 求证:

$$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\geq x+y+z.$$

4798.

L 为圆 ω 内任意一点，六点 A_1，A_2，A_3，B_1，B_2，B_3 在 ω 上顺时针依次排列，且满足 $\angle LA_1A_2=\angle LA_2A_3=\angle LB_1B_2=\angle LB_2B_3$. 求证：$A_1B_3$，$A_2B_2$，$A_3B_1$ 三线共点或平行.



4799.

计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^2\sqrt[n]{\lfloor x^n\rfloor}\mathrm{d}x$.

4800.

半径不相等的两圆 Γ_1、Γ_2 的圆心分别为 O_1、O_2，且交于 A_1、A_2 两点. 点 C_1 在 Γ_1 上，点 C_2 在 Γ_2 上，满足 C_1C_2 和 O_1O_2 平行，且 A_1、A_2、O_1、O_2 都不在直线 C_1C_2 上. 设直线 C_1O_1 和 C_2O_2 交于点 M，MA_1、MA_2 分别和 C_1C_2 交于点 B_1、B_2. 求证：$\triangle MB_1B_2$ 和 $\triangle MC_1C_2$ 的外接圆相切.