一道用数论估计方法做的组合几何题

2023-10-11 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_35ce13e1c608ec9f

题目：

在平面上是否存在一个有限点集 S，使得其中至少有 $|S|^2$ 组点构成调和四边形的四个顶点？

解答（PDF 中已展开）

分析：

这是一道很有意思的问题，组合几何题往往几何成分偏少，这题则很罕见地出现了调和四边形这一概念。所以首先考虑如何将其构造出来，很自然想到构造多组调和线束和同一个圆相交，那么只需要共线的多点产生尽可能多组调和点列。

设点 $Q(0,1)$，单位圆 Ω，点 $P_k(k,0)$ $(1\le k\le n)$，连接 P_kQ 和 Ω 交于点 R_k（异于点 Q），此时问题变为：

> 是否存在正整数 n，使得 $P_1,\cdots,P_n$ 中至少存在 n^2 组调和点列？

问题一下子清晰了起来，我们先探究四点能构成调和点列的充分条件。

先将这四点平移至 $(0,0),(a,0),(b,0),(c,0)$，其中 $0<a<b<c$. 于是

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\iff 2ac=b(a+c)$$

这里不需要求出方程的通解，找一些特殊解即可.

容易发现：$b=2pq$，$a=p(p+q)$，$c=q(p+q)$ 是一组解.

于是，对任意正整数 m 和 k，$(m,0)$，$(m+2kpq,0)$；$(m+kp(p+q),0)$，$(m+kq(p+q),0)$ 都构成一组调和点列.

进一步地，为了不产生重复解，可令 p 为素数，且 p,q 互质.

接下来，对于固定的素数 p，来求上述调和点列的组数：

先固定 q，任取正整数 m 和 k，使得最大数

$$m+kq(p+q)\le n$$

共有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{[\frac{n}{q(p+q)}]}(n-kq(p+q))\\ \geq&\frac{n}{2}\left(\frac{n}{q(p+q)}-1\right)\\ =&\frac{n^2}{2q(p+q)}-\frac{n}{2}\end{aligned}$$

组解.

再让 q 任取和 p 互质的数，且 $p<q\leq\sqrt{n}$，设组数为 $f(p)$，则

$$f(p)\geq\frac{n^2}{2}\sum_{p\nmid q}\max\left\{0,\frac{1}{q(p+q)}-\frac{1}{n}\right\}$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{f(p)}{n^2}\\ \geq&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{p\nmid q}\max\left\{0,\frac{1}{q(p+q)}-\frac{1}{n}\right\}\\ \geq&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2p}\sum_{p\nmid q}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p+q}\right)-\frac{\sqrt{n}}{n}\right]\\ =&\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{2p}\right)\\ \geq&\frac{1}{2p}\cdot\frac{p}{2p}\\ =&\frac{1}{4p}\end{aligned}$$

熟知全体素数的倒数和发散，于是当 n 足够大时，总有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_p f(p)}{n^2}>1$$

即 $\sum\limits_p f(p)>n^2$，于是完成了证明.

注：

上述过程主要呈现思路，其中细节请读者自行完成。