2023 年罗马尼亚国家数学奥林匹克（五至七年级组）

2023-04-22　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3622b603a03a5920

本文为图片版：正文为 3 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

龙老师翻译了八至十二年级组的题目，我把五、六、七年级的也一起翻译了。这次是真 · 小奥题了。

五年级组

1. 非零自然数 n 是一个完全平方数，2023 除以 n 的余数为 $223-\frac{3}{2}\cdot n$，求商.

2. 称一个自然数是特别的，如果在十进制表示下，它的每一位数码都非零，且任意相邻两位上的数码都是连续的自然数（不一定按照递增的顺序）.

(1) 求最大的一个数码和为 2023 的特别的数；

(2) 求最小的一个数码和为 2022 的特别的数.

3. 求所有自然数 m 和 n，使得

$$n\cdot(n+1)=3^m+s(n)+1182,$$

其中 $s(n)$ 表示自然数 n 的数码和.

4. 称自然数 $n\geq 2$ 具有性质 P，如果 n 的质因数分解式中，至少有一个质因子的次数为 3.

(1) 求最小的正整数 N，使得任意连续 N 个自然数中，都至少有一个具有性质 P 的自然数；

(2) 求最小的连续 15 个自然数，它们都不具有性质 P，但它们全体之和的 5 倍具有性质 P.

六年级组

1．求所有数列 $a_1, a_2, \cdots, a_8$，满足

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_3}{a_4}=\frac{a_5}{a_6}=\frac{a_7}{a_8}=k,$$

k 为自然数，且 $\{a_1, a_2, \cdots, a_8\}$ 包含 24 的所有正约数．

2．求所有三元正整数组 (a, b, c)，使得

$$\begin{cases} a^2+a=b+c \\ b^2+b=a+c \\ c^2+c=a+b \end{cases}$$

3．求所有正整数 n，使得 $N=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 能写为一个十进制的有限小数．

4．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle ACB=54^\circ$．$\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，直线 BD 上一点 E 满足 $DE=DC$．求证：$BE=2AD$．

七年级组

1．对自然数 n，定义 $a_n=\{\sqrt{n}\}-\{\sqrt{n+1}\}+\{\sqrt{n+2}\}-\{\sqrt{n+3}\}$，其中 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分．

(1) 求证：$a_1>0.2$；

(2) 求证：存在无穷多个整数 n，使得 $a_n<0$，也存在无穷多个整数 n，使得 $a_n>0$．

2．在平行四边形 $ABCD$ 中，$AC\cap BD=O$，M 为 AB 的中点．点 P 在 OC 上，$MP\cap BC=Q$．过 O 作 MP 的平行线，交直线 CD 于点 N．求证：A,N,Q 三点共线当且仅当 P 为 OC 中点．

3.在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90^\circ$,$\angle ABC=60^\circ$.点 D 在 AC 上,点 E 在 AB 上,满足 $CD=2DA$,且 DE 平分 $\angle ADB$．设 CE 和 BD 交于点 M，DE 和 AM 交于点 P．求证：(1)$AM\perp BD$；(2)$3PB=2CM$．

4．求证：

(1) 存在三个无理数 a,b,c，使得 $a+bc,b+ca,c+ab$ 均为有理数．

(2) 若实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，且 $a+bc,b+ca,c+ab$ 均为非零有理数，则 a,b,c 均为有理数．

尝试一下 tex 付费查看：

原文后半在公众号里是付费内容，导出件没有包含。