2024 年巴尔干数学奥林匹克马其顿代表队选拔考试

2024-04-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3678f944057f2485

2024 巴尔干数学奥林匹克马其顿代表队选拔考试

程国根 译

1. 在一个给定的群体 $\mathcal{F}$ 中，每个成员至少有两个来自 $\mathcal{F}$ 的熟人．此外，对于 $\mathcal{F}$ 中的每个圈 $A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n \leftrightarrow A_1$（这里的“$X \leftrightarrow Y$”表示 X 和 Y 是熟人），每个 A_i 都恰好与圈中的另外两个成员是熟人．

求证：在 $\mathcal{F}$ 中存在 X，Y 两人，满足他们每个人在 $\mathcal{F}$ 中都正好有两个熟人，且 X，Y 在 $\mathcal{F}$ 中至少有一个共同的熟人．

2. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 和点 E 分别在边 BC 和 AC 上．$\triangle ADC$ 的外接圆与 $\triangle BCE$ 的外接圆交于点 F（异于 C）．直线 FE 和 AD 交于点 G，直线 FD 和 BE 交于点 H．求证：CF，AH，BG 三线共点．

3. 设素数 $p \neq 5$．求证：$p^5 - 1$ 有一个模 5 余 1 的素因子．

4. 正整数 $n \geq 2$，实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [1, 2]$．求证：

$$|x_1-x_2|+\cdots+|x_n-x_1|+\frac{1}{3}\left(|x_1-x_3|+\cdots+|x_n-x_2|\right) \leq \frac{2}{3}(x_1+\cdots+x_n).$$

并求出等号成立条件．

1

在 B 站录了个第 4 题的讲解视频，感兴趣的可以去看看。

【巴尔干数学竞赛系列】局部不等式显神威

2024 巴尔干数学奥林匹克马其顿代表队选拔考试

程国根 译

1. 在一个给定的群体 $\mathcal{F}$中，每个成员至少有两个来自 $\mathcal{F}$的熟人. 此外，对于 $\mathcal{F}$中的每个圈 $A_{1}\leftrightarrow A_{2} \leftrightarrow\cdots \leftrightarrow A_{n}\leftrightarrow A_{1}$（这里的 “$X \leftrightarrow Y$” 表示 X和 Y是熟人），每个 A_i都恰好与圈中的另外两个成员是熟人. 求证：在 $\mathcal{F}$中存

在 X，Y两人，满足他们每个人在 $\mathcal{F}$中都正好有两个熟人，且 X，Y在 $\mathcal{F}$中至少有一个共同的熟人.

2. 在 $\triangle ABC$中，点 D和点 E分别在边 BC和 AC上. $\triangle ADC$的外接圆与 $\triangle BCE$的外接圆交于点 F（异于 C）. 直线 FE和 AD交于点 G，直线 FD和 BE交于点 H. 求证：CF，AH，BG三线共点.

3. 设素数 $p\neq 5$. 求证：$p^{5}-1$有一个模 5余 1的素因子.

4. 正整数 $n\ge 2$，实数 $x_{1},x_{2},\cdots,x_{n}\in [1,2]$. 求证：$$| x_1-x_2|+\cdots+| x_n-x_1| + \frac{1}{3} \left(| x_1-x_3|+\cdots+| x_n-x_2|\right) \leq \frac{2}{3} (x_1+\cdots+x_n).$$并求出等号成立条件.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024巴尔干数学奥林匹克马其顿代表队选拔考试}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\ex
↪ 在一个给定的群体$\mathcal{F}$中，每个成员至少有两个来自$\mathcal{F}$的熟人. 此外，
↪ 对于$\mathcal{F}$中的每个圈$A_{1}\leftrightarrow A_{2} \leftrightarrow\cdots\leftrightarrow A_{n}\leftrightarrow A_{1}$
↪ （这里的 “$X \leftrightarrow Y$” 表示$X$和$Y$是熟人），每个$A_i$都恰好与圈中的另外两个成员是熟人. 求证：
↪ 在$\mathcal{F}$中存在$X$，$Y$两人，满足他们每个人在$\mathcal{F}$中都正好有两个熟人，且$X$，
↪ $Y$在$\mathcal{F}$中至少有一个共同的熟人. \vfill\ex 在$\triangle ABC$中，点$D$和点$E$分别在边$BC$和$AC$上.
↪ $\triangle ADC$的外接圆与$\triangle BCE$的外接圆交于点$F$（异于$C$）. 直线$FE$和$AD$交于点$G$，
↪ 直线$FD$和$BE$交于点$H$. 求证：$CF$，$AH$，$BG$三线共点. \vfill\ex 设素数$p\neq 5$. 求证：
↪ $p^{5}-1$有一个模$5$余$1$的素因子. \vfill\ex 正整数$n\ge 2$，实数$x_{1},x_{2},\cdots,x_{n}\in [1,2]$. 求证：
↪ $$|x_1-x_2|+\cdots+|x_n-x_1| + \frac{1}{3} \left(|x_1-x_3|+\cdots+|x_n-x_2|\right) \leq \frac{2}{3}
↪ (x_1+\cdots+x_n).$$并求出等号成立条件. \vfill
```