数学竞赛每日一练第 14 期解答

2021-06-17 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_36967a6322af84c0

已知正方形的四个顶点都在函数 $y=f(x)$ 图象上，且函数 $y=f(x)$ 图象上的点 (x,y) 都满足

$$(x^3-4x-y)^{2021}+x^{2021}+x^3-3x-y=0$$

则这样的正方形最多有 _____ 个.

解答（PDF 中已展开）

解答设 $x^3-4x-y=z$，则

$$z^{2021}+x^{2021}+z+x=0$$

记 $g(t)=t^{2021}+t$，则 $g(t)$ 为单调递增的奇函数. 且

$$g(z)=-g(x)=g(-x)$$

于是 $z=-x$，即 $y=x^3-3x$. 此即为 $y=f(x)$ 的解析式.

设正方形 $ABCD$ 的四个顶点坐标分别为 $A(x_1,x_1^3-3x_1)$，$B(x_2,x_2^3-3x_2)$，$C(x_3,x_3^3-3x_3)$，$D(x_4,x_4^3-3x_4)$.

于是由 AC，BD 互相平分得：

$$\begin{cases} x_1+x_3=x_2+x_4 \\ x_1^3-3x_1+x_3^3-3x_3=x_2^3-3x_2+x_4^3-3x_4 \end{cases}$$

因此

$$x_1^3+x_3^3=x_2^3+x_4^3$$

若 $x_1+x_3=x_2+x_4\neq 0$，

则 $x_1^2-x_1x_3+x_3^2=x_2^2-x_2x_4+x_4^2$，

即 $x_1x_3=x_2x_4$.

若设 $x_1+x_3=x_2+x_4=a$，$x_1x_3=x_2x_4=b$，则 x_1、x_3，x_2、x_4 均为方程

$$x^2-ax+b=0$$

的根，矛盾!

于是 $x_1+x_3=x_2+x_4=0$.

再由 $OA \perp OB$ 可设 $OA: y=kx$，$OB: y=-\dfrac{1}{k}x$. 不妨设 A，B 在第一、四象限.

联立

$$\begin{cases} y=kx \\ y=x^3-3x \end{cases}$$

可得

$$A\left(\sqrt{k-3}, k\sqrt{k-3}\right),$$

同理

$$B\left(\sqrt{-\frac{1}{k}-3}, -\frac{1}{k}\sqrt{-\frac{1}{k}-3}\right).$$

由 $OA=OB$ 得:

$$(k-3)(1+k^2)=\left(-\frac{1}{k}-3\right)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

即

$$k^4-3k^3+3k+1=0$$

解得:

$$k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \text{或} k=1\pm\sqrt{2}$$

考虑到重合的情况，这样的正方形共有 2 个.

用类似的方法可以解决今天的每日一练 (第 21 期).