2024 年马来西亚 IMO 代表队选拔考试

2024-04-25 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_36ae1ee46f9200ea

2024 年马来西亚 IMO 代表队选拔考试

程国根 译

第一天

1. 锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，BE 和 CF 为两条高．在射线 BH 和 CH 上分别取点 P 和点 Q，使得 PQ 平行于 BC，且 $APHQ$ 四点共圆．设 $\triangle APF$ 和 $\triangle AQE$ 的外接圆再次交于点 $X \neq A$．求证：AX 平行于 BC．

2. 设 k 为正整数．求所有整数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$，满足存在非线性的整系数多项式 P，使得对任意正整数 n，都存在正整数 m，满足等式：

$$P(n+a_1)+P(n+a_2)+\ldots+P(n+a_k)=P(m).$$

3. 求所有素数 p，使得对任意整数 k，都存在整数 x 和 y，满足

$$x^3+2023xy+y^3 \equiv k \pmod{p}.$$

第二天

4. Zscoder 有一个简单无向图 G，有 $n \geq 3$ 个顶点．Navi 为每个顶点标上一个正整数，并在其中一个顶点放置一个标记，现在这个顶点被染为红色．在每一轮中，Zscoder 会按照以下规则进行游戏：

如果标记当前位于编号为 t 的顶点 v，那么 Zscoder 可以沿着 G 中的边移动标记（可能重复经过某些边）恰 t 次．在移动 t 次后，如果标记所在的顶点未被染色，就将其染为红色，否则就什么也不做，然后结束这一回合．

Zscoder 声称，无论 Navi 如何安排每个顶点的编号及标记的初始位置，他都能在有限的回合数后将 G 中的所有顶点染为红色．求 G 中边数的最小值（用 n 表示）．

5. 设 n 为奇素数，$m = \varphi(n)$ 为欧拉函数．若余数集合 $T = \{a_1, \cdots, a_k\} \pmod n$ 满足：$\forall 1 \leq i \leq k, \gcd(a_i, n) > 1$，且 $\forall 1 \leq i < j \leq k$，$\gcd(a_i, a_j) = 1$，则称 T 是好的．对一个好的集合 $T = \{a_1, \cdots, a_k\}$，定义 S_n 为 $\sum_{i=1}^{k} a_i^m$ 模 n 的所有不同余数组成的集合．求 $|S_n|$．

6. 设 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 三圆两两外切，ω_1 和 ω_2 切于点 A．过点 A 作 ω_3 的两条切线，分别和 ω_1 再次交于点 B, C．直线 BC 和 ω_3 交于两点，X 为其中更远离 B 和 C 的一点．求证：过 X 作 ω_2 的切线，和 $\triangle ABC$ 的某个旁切圆也相切．

2024 年马来西亚 IMO 代表队选拔考试

程国根　译

第一天

1. 锐角 $\triangle ABC$的垂心为 H，BE和 CF为两条高．在射线 BH和 CH上分别取点 P和点 Q，使得 PQ平行于 BC，且 $APHQ$四点共圆．设 $\triangle APF$和 $\triangle AQE$的外接圆再次交于点 $X\neq A$．求证：AX平行于 BC.

2. 设 k为正整数．求所有整数组 $(a_{1},a_{2},\cdots,a_{k})$，满足存在非线性的整系数多项式 P，使得对任意正整数 n，都存在正整数 m，满足等式：$$P(n+a_1)+P(n+a_2)+...+P(n+a_k)=P(m).$$

3. 求所有素数 p，使得对任意整数 k，都存在整数 x和 y，满足 $$x^3+2023xy+y^3 \equiv k \pmod p.$$

第二天

4. Zscoder 有一个简单无向图 G，有 $n\ge 3$个顶点．Navi 为每个顶点标上一个正整数，并在其中一个顶点放置一个标记，现在这个顶点被染为红色．在每一轮中，Zscoder 会按照以下规则进行游戏：如果标记当前位于编号为 t的顶点 v，那么 Zscoder 可以沿着 G中的边移动标记（可能重复经过某些边）恰 t次．在移动 t次后，如果标记所在的顶点未被染色，就将其染为红色，否则就什么也不做，然后结束这一回合．Zscoder 声称，无论 Navi 如何安排每个顶点的编号及标记的初始位置，他都能在有限的回合数后将 G中的所有顶点染为红色．求 G中边数的最小值（用 n表示）．

5. 设 n为奇素数，$m=\varphi(n)$为欧拉函数．若余数集合 $T=\{a_{1},\cdots,a_{k}\}\pmod {n}$满足：$\forall 1\le i\le k$，$\gcd(a_{i},n)>1$，且 $\forall 1\le i<j\le k$，$\gcd(a_{i},a_{j})=1$，则称 T是好的．对一个好的集合 $T=\{a_{1},\cdots,a_{k}\}$，定义 S_{n}为 $\sum_{i=1}^k a_i ^m$模 n的所有不同余数组成的集合．求 $| S_{n}|$.

6. 设 $\omega_{1},\omega_{2},\omega_{3}$三圆两两外切，$\omega_{1}$和 ω_{2}切于点 A．过点 A作 ω_{3}的两条切线，分别和 ω_{1}再次交于点 B,C．直线 BC和 ω_{3}交于两点，X为其中更远离 B和 C的一点．求证：过 X作 ω_{2}的切线，和 $\triangle ABC$的某个旁切圆也相切．

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年马来西亚IMO代表队选拔考试}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\section*{第一天}\ex 锐角$\triangle
↪ ABC$的垂心为$H$，$BE$和$CF$为两条高．在射线$BH$和$CH$上分别取点$P$和点$Q$，使得$PQ$平行于$BC$，
↪ 且$APHQ$四点共圆．设$\triangle APF$和$\triangle AQE$的外接圆再次交于点$X\neq A$．求证：$AX$平行于$BC$．\vfill\ex
↪ 设$k$为正整数．求所有整数组$(a_{1},a_{2},\cdots,a_{k})$，满足存在非线性的整系数多项式$P$，使得对任意正整数$n$，
↪ 都存在正整数$m$，满足等式：$$P(n+a_1)+P(n+a_2)+...+P(n+a_k)=P(m).$$\vfill\ex 求所有素数$p$，使得对任意整数$k$，
↪ 都存在整数$x$和$y$，满足$$x^3+2023xy+y^3 \equiv k \pmod p.$$\vfill\newpage\section*{第二天}\ex
↪ Zscoder有一个简单无向图$G$，有$n\ge 3$个顶点．Navi为每个顶点标上一个正整数，并在其中一个顶点放置一个标记，
↪ 现在这个顶点被染为红色．在每一轮中，Zscoder会按照以下规则进行游戏：
如果标记当前位于编号为$t$的顶点$v$，那么Zscoder可以沿着$G$中的边移动标记（可能重复经过某些边）恰$t$次．
↪ 在移动$t$次后，如果标记所在的顶点未被染色，就将其染为红色，否则就什么也不做，然后结束这一回合．
Zscoder声称，无论Navi如何安排每个顶点的编号及标记的初始位置，他都能在有限的回合数后将$G$中的所有顶点染为红色．
↪ 求$G$中边数的最小值（用$n$表示）．
\vfill\ex 设$n$为奇素数，$m=\varphi(n)$为欧拉函数．若余数集合$T=\{a_{1},\cdots,a_{k}\}\pmod {n}$满足：$\forall 1\le i\le k$，
↪ $\gcd(a_{i},n)>1$，且$\forall 1\le i<j\le k$，$\gcd(a_{i},a_{j})=1$，则称$T$是好的．对一个好的集合$T=\{a_{1},\cdots,a_{k}\}$，
↪ 定义$S_{n}$为$\sum_{i=1}^k a_i ^m$模$n$的所有不同余数组成的集合．求$|S_{n}|$．\vfill\ex
↪ 设$\omega_{1},\omega_{2},\omega_{3}$三圆两两外切，$\omega_{1}$和$\omega_{2}$切于点$A$．
↪ 过点$A$作$\omega_{3}$的两条切线，分别和$\omega_{1}$再次交于点$B,C$．直线$BC$和$\omega_{3}$交于两点，
↪ $X$为其中更远离$B$和$C$的一点．求证：过$X$作$\omega_{2}$的切线，和$\triangle ABC$的某个旁切圆也相切．\vfill
```