两道不等式问题的解答

2022-03-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_36bd89f8d1692e5c

1. 正实数 a，b，c 满足 $ab+bc+ca=3$，求证：

$$\frac{bc}{1+a^4}+\frac{ca}{1+b^4}+\frac{ab}{1+c^4}\geq\frac{3}{2}.$$

(2022 年菲律宾数学奥林匹克第二天第 3 题)

解答（PDF 中已展开）

证明：注意到 $\dfrac{bc}{1+a^4}=\dfrac{b^3c^3}{b^2c^2+a^4b^2c^2}=\dfrac{(bc)^3}{(bc)^2+(ab)^2\cdot(ac)^2}$.

设 $bc=x$，$ca=y$，$ab=z$，则 $x+y+z=3$.

原不等式变为 $\dfrac{x^3}{x^2+y^2z^2}+\dfrac{y^3}{y^2+z^2x^2}+\dfrac{z^3}{z^2+x^2y^2}\geq\dfrac{3}{2}$

即 $\displaystyle\sum_{cyc}\left(x-\frac{xy^2z^2}{x^2+y^2z^2}\right)\geq\frac{3}{2}$，也即 $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{xy^2z^2}{x^2+y^2z^2}\leq\frac{3}{2}$.

而 $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{xy^2z^2}{x^2+y^2z^2}\leq\sum_{cyc}\frac{xy^2z^2}{2xyz}=\sum_{cyc}\frac{yz}{2}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{3}{2}$，证毕.

1. $\triangle ABC$ 三边长记为 a，b，c. G 为 $\triangle ABC$ 重心. 证明对平面上任一点 P，有下列不等式：

$$a\cdot PA^3+b\cdot PB^3+c\cdot PC^3\geqslant 3abc\cdot PG$$

(微信群“不等式之家“)

解答（PDF 中已展开）

证明：令点 P 为复平面原点. 则

$$\begin{aligned}
&a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2\\
=&|(B-C)A^3|+|(C-A)B^3|+|(A-B)C^3|\\
\geq&|(B-C)A^3+(C-A)B^3+(A-B)C^3|\\
=&|(A+B+C)(A-B)(B-C)(C-A)|\\
=&3abc\cdot PG
\end{aligned}$$