2023 年马其顿国家队选拔考试

2023-05-28　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_37d9b32f6a3143ce

2023 年马其顿国家队选拔考试

程国根　译

第一天

1. 对正整数 $n>1$，记 $s(n)$ 为 n 的最小素因子，$d(n)$ 为 n 的正约数个数．能否选取 2023 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{2023}$，其中 $a_1<a_2-1<\cdots<a_{2023}-2022$，使得对任意 $k=1,2,\cdots,2022$，都有 $d(a_{k+1}-a_k-1)>2023^k$，$s(a_{k+1}-a_k)>2023^k$？

2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，$AB<BC$．点 P 在线段 BC 上，满足 $\angle APB=\angle BAC$．$\triangle ABC$ 的外接圆在点 A 处的切线交 $\triangle APB$ 的外接圆于点 Q（异于 A），设点 Q' 和点 Q 关于 AB 的中点中心对称．直线 PQ 和线段 AQ' 交于点 S．求证：

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}>\frac{1}{CS}.$$

3. 设 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 单调递增，且满足对任意 $n\in\mathbb{N}$，都有 $f(f(n))=n^2$．求 $f(2023)$ 的最大值和最小值．

第二天

4. 函数 $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 满足：对任意平面上的单位正三角形，其顶点 A,B,C 满足 $f(A)+f(B)+f(C)=0$．求证：对任意 $x\in\mathbb{R}^2$，$f(x)=0$．

5. 设 $Q(x)=a_{2023}x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$ 为整系数多项式．对奇素数 p，定义多项式 $Q_p(x)=a_{2023}^{p-2}x^{2023}+a_{2022}^{p-2}x^{2022}+\cdots+a_1^{p-2}x+a_0^{p-2}$．问：是否存在无穷多少个素数 p，使得对任意 $x\in\mathbb{Z}$，$\dfrac{Q_p(x)-Q(x)}{p}$ 均为整数？并在所有这样的多项式 Q 中，求 $Q(2023)$ 的最大值．

6.Lucky 和 Jinx 各得到了一张纸，纸上有正 2023 边形的所有 2023 个顶点．然后，他们的任务是将所有连接这些点的线段染色，使得其中不存在三边同色或三边均不同色的三角形，也不存在四边同色的四边形（可以不是凸四边形）．完成染色后发现，Jinx 用的颜色至少比 Lucky 多了两种，他们每个人各用了几种颜色？



tex 文稿：

2023 年马其顿国家队选拔考试

程国根　译

第一天

1. 对正整数 $n>1$，记 $s(n)$为 n的最小素因子，$d(n)$为 n的正约数个数．能否选取 2023个正整数 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{2023}$，其中 $a_{1}<a_{2}-1<\cdots<a_{2023}-2022$，使得对任意 $k=1,2,\cdots,2022$，都有 $d(a_{k+1}-a_{k}-1)>2023^{k}$，$s(a_{k+1}-a_{k})>2023^{k}$?

2. 在锐角 $\triangle ABC$中，$AB<AC$，$AB<BC$．点 P在线段 BC上，满足 $\angle APB=\angle BAC$．$\triangle ABC$的外接圆在点 A处的切线交 $\triangle APB$的外接圆于点 Q（异于 A），设点 Q'和点 Q关于 AB的中点中心对称．直线 PQ和线段 AQ'交于点 S．求证：$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC} > \frac{1}{CS}.$$

3. 设 f：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$单调递增，且满足对任意 $n\in\mathbb{N}$，都有 $f(f(n))=n^{2}$．求 $f(2023)$的最大值和最小值.

第二天

4. 函数 f：$\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$满足：对任意平面上的单位正三角形，其顶点 A,B,C满足 $f(A)+f(B)+f(C)=0$．求证：对任意 $x\in\mathbb{R}^{2}$，$f(x)=0$.

5. 设 $Q(x) = a_{2023}x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+\dots+a_{1}x+a_{0} \in \mathbb{Z}[x]$为整系数多项式. 对奇素数 p，定义多项式 $Q_{p}(x) = a_{2023}^{p-2}x^{2023}+a_{2022}^{p-2}x^{2022}+\dots+a_{1}^{p-2}x+a_{0}^{p-2}$. 问：是否存在无穷多少个素数 p，使得对任意 $x\in\mathbb{Z}$，$\dfrac{Q_{p}(x)-Q(x)}{p}$均为整数？并在所有这样的多项式 Q中，求 $Q(2023)$的最大值.

6.Lucky 和 Jinx 各得到了一张纸，纸上有正 2023边形的所有 2023个顶点. 然后，他们的任务是将所有连接这些点的线段染色，使得其中不存在三边同色或三边均不同色的三角形，也不存在四边同色的四边形（可以不是凸四边形）. 完成染色后发现，Jinx 用的颜色至少比 Lucky 多了两种，他们每个人各用了几种颜色？

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass{ctexart}
\usepackage{amsfonts}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{enumitem}
\usepackage{geometry}
\usepackage{setspace}
\geometry{a5paper,left=1cm,right=1cm,top=0.5cm,bottom=0.8cm}
\usepackage{hyperref}
\begin{document}

\begin{spacing}{1.4}
\section*{2023 年马其顿国家队选拔考试}

\begin{flushright}
程国根\quad 译
\end{flushright}
\section*{第一天}
{\bf 1.}对正整数$n>1$，记$s(n)$为$n$的最小素因子，$d(n)$为$n$的正约数个数.
↪ 能否选取$2023$个正整数$a_{1},a_{2},\cdots,a_{2023}$，其中$a_{1}<a_{2}-1<\cdots<a_{2023}-2022$，
↪ 使得对任意$k=1,2,\cdots,2022$，都有$d(a_{k+1}-a_{k}-1)>2023^{k}$，$s(a_{k+1}-a_{k})>2023^{k}$?
\vfill
{\bf 2.}在锐角$\triangle ABC$中，$AB<AC$，$AB<BC$. 点$P$在线段$BC$上，满足$\angle APB=\angle BAC$. $\triangle
↪ ABC$的外接圆在点$A$处的切线交$\triangle APB$的外接圆于点$Q$（异于$A$），
↪ 设点$Q'$和点$Q$关于$AB$的中点中心对称. 直线$PQ$和线段$AQ'$交于点$S$. 求证：$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC} >
↪ \frac{1}{CS}.$$
\vfill
{\bf 3.}设$f$：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$单调递增，且满足对任意$n\in\mathbb{N}$，都有$f(f(n))=n^{2}$.
↪ 求$f(2023)$的最大值和最小值.
\vfill
\section*{第二天}
{\bf 4.}函数$f$：$\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$满足：对任意平面上的单位正三角形，其顶点$A,B,C$满足$f(A)+f(B)+f(C)=0$.
↪ 求证：对任意$x\in\mathbb{R}^{2}$，$f(x)=0$.
\vfill
{\bf 5.}设$Q(x) = a_{2023}x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+\dots+a_{1}x+a_{0} \in \mathbb{Z}[x]$为整系数多项式. 对奇素数$p$，
↪ 定义多项式$Q_{p}(x) = a_{2023}^{p-2}x^{2023}+a_{2022}^{p-2}x^{2022}+\dots+a_{1}^{p-2}x+a_{0}^{p-2}$. 问：
↪ 是否存在无穷多少个素数$p$，使得对任意$x\in\mathbb{Z}$，$\dfrac{Q_{p}(x)-Q(x)}{p}$均为整数？
↪ 并在所有这样的多项式$Q$中，求$Q(2023)$的最大值.
\vfill
{\bf 6.}Lucky和Jinx各得到了一张纸，纸上有正$2023$边形的所有$2023$个顶点. 然后，
↪ 他们的任务是将所有连接这些点的线段染色，使得其中不存在三边同色或三边均不同色的三角形，也不存在四边同色的四边形
↪ （可以不是凸四边形）. 完成染色后发现，Jinx用的颜色至少比Lucky多了两种，他们每个人各用了几种颜色？
```

```
\vfill
\end{spacing}
\end{document}
```