离散型不等式：整数条件的几种基本用法

2026-08-29　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_38228c9cd7e24196

本系列文章均由我提供完整思路、所有例题，并交给 GPT 整理排版而成.

“

很多不等式在实数范围内只能得到“差一点”的估计，而整数条件往往正是把这“一点”补上的关键。本文从竞赛中最常见的结构出发，系统整理整数条件的七类基本用法，并用 15 个例题展示如何从连续估计走向离散最优。

处理含整数条件的不等式时，常先在实数范围内估计，再利用离散性收紧界或确定取等结构。本文反复用到以下几条基本事实：

- $a,b\in\mathbb{N}_+\Rightarrow ab\ge a+b-1$，取等时至少一个为 1；
- $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow (x-m)(x-m-1)\ge 0$，取等为 $m,m+1$；
- $a_1<\cdots<a_n$，$a_i\in\mathbb{Z}\Rightarrow a_j-a_i\ge j-i$；
- $d\in\mathbb{Z}\Rightarrow d^2\ge d$，取等为 $0,1$。

最后一式等价于 $d(d-1)\ge 0$。在单调数列的差分中常有 $d\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$，此时等号恰在相邻整数 $0,1$ 处取得。

下文依次讨论正整数条件下的积和关系与最小增量、固定和下的调整、连续变量的端点调整、互异整数的间隔、整数差分、单调条件下的辅助式构造，以及整体量的整数性。

正整数条件：积和关系与最小增量

积和关系

由 $(a-1)(b-1)\ge 0$ 得 $ab\ge a+b-1$. 反复使用可得：若 $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{N}_+$，则 $x_1x_2\cdots x_n\ge x_1+x_2+\cdots+x_n-(n-1)$, 取等当且仅当至多一个 x_i 不为 1。

例 1 ｜ 2017 年中国西部数学邀请赛

正整数 n 满足：存在 $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{N}_+$，使

$$x_1x_2\cdots x_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)=100n.$$

求 n 的最大值。

分析　设 $A=\prod x_i$，$B=\sum x_i$，则 $AB=100n$。要估计 n，先要把 A 控制在与 n 无关的范围内。由均值不等式 $B\ge nA^{1/n}$，可得 $A<100$；由于 A 是正整数，立即加强为 $A\le 99$。再用

$A \geq B-(n-1)$ 得 $B \leq A+n-1$，于是 AB 的两个因子都有了上界。若要达到最后的上界，积和关系必须取等，所以除一个变量外其余变量都应为 1；因此取等构造应由一个非 1 项和其余的 1 组成。

解答（PDF 中已展开）

解答 记 $A=\prod_{i=1}^{n} x_i$，$B=\sum_{i=1}^{n} x_i$。由均值不等式，$B \geq nA^{1/n}$，故

$100n = AB \geq nA^{1+1/n}.$

于是 $A \leq 100^{n/(n+1)} < 100$。由于 A 为正整数，$A \leq 99$。

又由正整数的积和关系 $A \geq B-(n-1)$，所以 $B \leq A+n-1 \leq n+98$。因此 $100n = AB \leq 99(n+98)$，从而 $n \leq 9702$。

取 9701 个 $x_i=1$，另一个 $x_i=99$。此时 $A=99$，$B=9800$，且 $AB=100\cdot 9702$，故 $n_{\max}=9702$。

例 2 ｜ 2009 年罗马尼亚 TST

设 $n \geq 2$，正整数 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ 满足

$x_1+x_2+\cdots+x_n = x_1x_2\cdots x_n.$

求 $x_1+\cdots+x_n$ 的最大值。

解答（PDF 中已展开）

分析 把最大项 x_1 单独拿出来。令 $Q=x_2\cdots x_n$，$T=x_2+\cdots+x_n$，则题设等价于 $T=x_1(Q-1)$。记 $b=Q-1$。一方面，$T \leq (n-1)x_1$，所以 $b \leq n-1$；另一方面，正整数的积和关系给出 $T \leq Q+n-2=b+n-1$，于是 $x_1 \leq 1+(n-1)/b$。总和为 $x_1(b+1)$，问题便化成 $1 \leq b \leq n-1$ 上的一元估计。端点 $b=1$ 对应 $Q=2$，也正是大量变量取 1 的取等结构。

解答 记 $Q=x_2x_3\cdots x_n$，$T=x_2+x_3+\cdots+x_n$，则 $T=x_1(Q-1)$。由正整数的积和关系 $Q \geq T-(n-2)$，故 $T \leq Q+n-2$。

令 $b=Q-1$。由 $T=x_1b \leq (n-1)x_1$ 得 $1 \leq b \leq n-1$；又 $x_1b=T \leq b+n-1$，故 $x_1 \leq 1+\frac{n-1}{b}$。于是

$x_1+\cdots+x_n \leq \left(1+\frac{n-1}{b}\right)(b+1) = n+b+\frac{n-1}{b} \leq 2n,$

其中最后一步等价于 $(b-1)(b-n+1) \leq 0$。

取 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(n,2,1,\ldots,1)$，则和与积均为 $2n$，故最大值为 $2n$。

“

注 例 1 先限制乘积本身，例 2 则把剩余乘积化为整数参数；两题都以正整数的积和关系为主要工具。

最小增量与部分和

正整数条件还有一个基本作用：$a_i \in \mathbb{N}_+$ 不仅说明 a_i 非负，还给出 $a_i \geq 1$。在含部分和的分式中，这会使第 k 个部分和至少按 1 的速度增长，从而给分母提供明确的下界，也便于进行裂项比较。

例 3 ｜正整数部分和的裂项求和

设 $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{N}_+$。证明

$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{1+a_1+\cdots+a_k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

解答（PDF 中已展开）

分析　右端是调和和，证明时应设法产生权 $1/k$。记 $S_k=1+a_1+\cdots+a_k$。带权柯西不等式把原和平方后，会出现 $\sum ka_k/S_k^2$。又因 $a_k=S_k-S_{k-1}$ 且 $S_k>S_{k-1}$，可将 a_k/S_k^2 与 $a_k/(S_{k-1}S_k)=1/S_{k-1}-1/S_k$ 比较，求和后中间项相消。最后用 $a_i\ge1$ 得 $S_j\ge j+1$。本题只用到 $a_i\ge1$：正整数使部分和每一步至少增加 1。

证明　令 $S_k=1+a_1+\cdots+a_k$，并约定 $S_0=1$。由柯西不等式，

$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k}}{S_k}\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{ka_k}{S_k^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$.

又因 $S_k>S_{k-1}>0$，

$\frac{a_k}{S_k^2}<\frac{a_k}{S_{k-1}S_k}=\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k}$.

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka_k}{S_k^2}&<\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k}\right)\\&=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{S_j}-\frac{n}{S_n}\\&<\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{S_j}\le\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到了 $a_i\ge1$，故 $S_j\ge j+1$。代回柯西即得比题设更强的严格不等式。

“

注　这一例与前两例的区别在于：整数性没有表现为 “向下取整”，而是表现为每个正整数至少为 1，使部分和拥有固定的最小增长速度。

固定和下的离散结构

单位调整与相邻整数

固定和时，若 $p\ge q+2$，常把 (p,q) 调整为 $(p-1,q+1)$。若目标值随此调整增大，则极值时任意两项之差至多为 1。

另一种常见情形是先在实数范围内求出等号点。若等号点落在相邻整数 $m,m+1$ 之间，则整数极值通常只需考察这两个取值，并可用 $(x-m)(x-m-1)\ge0$ 构造逐项不等式。

例 4 ｜固定和下的分式极值

正整数 $a_1,\dots,a_{22}$ 满足 $\sum_{k=1}^{22}a_k=59$。求 $\sum_{k=1}^{22}\frac{a_k}{a_k+1}$ 的最大值。

解答（PDF 中已展开）

分析 若先把 a_k 看成实数，函数 $g(x)=x/(x+1)$ 为凹函数，固定总和时各项越接近越有利；平均数 $59/22$ 介于 2 与 3 之间，因此整数极值应落在 $2,3$ 上。严格证明可用单位调整：若 $p\geq q+2$，把 (p,q) 改为 $(p-1,q+1)$，总和不变而目标增大，所以极值时任意两项之差至多为 1。确定取值后，也可由取等点 $2,3$ 反推线性上界。

解答

方法一（调整法）

若 $p\geq q+2$，则

$g(p-1)+g(q+1)-g(p)-g(q)=\frac{1}{(q+1)(q+2)}-\frac{1}{p(p+1)}>0.$

因此极值时任意两项之差至多为 1，只能有 $a_k\in\{2,3\}$。设其中有 t 个 2，则 $2t+3(22-t)=59$，故 $t=7$，从而最大值为 $7\cdot\frac{2}{3}+15\cdot\frac{3}{4}=\frac{191}{12}$。

方法二（逐项构造）

对任意正整数 x，

$\frac{x}{12}+\frac{1}{2}-\frac{x}{x+1}=\frac{(x-2)(x-3)}{12(x+1)}\geq 0.$

故

$\sum_{k=1}^{22}\frac{a_k}{a_k+1}\leq\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{22}a_k+11=\frac{191}{12}.$

等号要求每个 a_k 都等于 2 或 3；由总和为 59，恰有 7 个 2、15 个 3，故上界可以达到。

“

注 调整法先确定可能的取值；知道取等点以后，也可以反向构造逐项不等式。

例 5 | 2023 年爱尖子

整数 $a_1,a_2,\ldots,a_{10}$ 满足 $\sum_{k=1}^{10}ka_k=2023$。求 $\sum_{k=1}^{10}ka_k^2$ 的最小值。

解答（PDF 中已展开）

分析 先看实数问题。带权柯西不等式的等号要求所有 a_k 相等，公共值为 $2023/55\approx 36.78$，因此整数极值应重点考察 $36,37$。对整数 a，$(a-36)(a-37)\geq 0$ 恰在这两个值取等，它把二次项 a^2 线性化，正好可以代入条件 $\sum ka_k=2023$。最后还需检查等号能否实现：写 $a_k=36+\varepsilon_k$，便化为 $\sum k\varepsilon_k=43$ 的有限选择问题。

解答 对任意整数 a，$(a-36)(a-37)\geq 0$，即 $a^2\geq 73a-1332$。乘以 k 后求和，得

$\sum_{k=1}^{10}ka_k^2\geq 73\sum_{k=1}^{10}ka_k-1332\sum_{k=1}^{10}k=74419.$

取等要求 $a_k\in\{36,37\}$。写 $a_k=36+\varepsilon_k$，$\varepsilon_k\in\{0,1\}$，则 $\sum_{k=1}^{10}k\varepsilon_k=43$。例如取 $k\in\{3,6,7,8,9,10\}$ 时 $\varepsilon_k=1$，其余为 0，即可取等。故最小值为 74419。

邻项乘积的奇偶分组

若目标是相邻项乘积之和，可以把奇数下标与偶数下标分别汇总。每个邻项乘积都来自一奇一偶两个位置，因而邻项乘积和可以由两组总和的乘积控制；取等条件还会进一步限制非零项的位置。

例 6 | 2023 年希望联盟夏令营

正整数 $a_1,\dots,a_{100}$ 的和为 1000。求

$S=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{99}a_{100}$

的最大值，并求达到最大值的数组个数。

解答（PDF 中已展开）

分析 先令 $b_i=a_i-1\ge 0$，于是 $\sum b_i=900$。展开相邻乘积后，除固定项外只需处理 $\sum b_ib_{i+1}$ 和两个端点项。把奇、偶下标上的 b_i 总和分别记为 U,V，则每个 b_ib_{i+1} 都是 UV 中的一个奇偶交叉乘积，所以 $\sum b_ib_{i+1}\le UV\le 450^2$。计数时必须继续追踪等号：所有同时为正的奇、偶位置都要彼此相邻，因此非零位置只能是两个相邻点，或三个连续点；端点项还要求 $b_1=b_{100}=0$。

解答 令 $b_i=a_i-1\ge 0$，则 $\sum_{i=1}^{100}b_i=900$，并且

$$\begin{aligned}S&=\sum_{i=1}^{99}(b_i+1)(b_{i+1}+1)\\&=1899-b_1-b_{100}+\sum_{i=1}^{99}b_ib_{i+1}.\end{aligned}$$

记

$U=\sum_{\substack{1\le i\le 100\\ i\text{ 为奇数}}}b_i,\qquad V=\sum_{\substack{1\le i\le 100\\ i\text{ 为偶数}}}b_i.$

由于每个相邻乘积都由一个奇下标项和一个偶下标项组成，

$\sum_{i=1}^{99}b_ib_{i+1}\le UV\le\left(\frac{U+V}{2}\right)^2=450^2.$

所以 $S\le 1899+450^2=204399$。

取等必须同时满足 $b_1=b_{100}=0$、$U=V=450$，并且任意一对不相邻、奇偶性不同的下标 i,j 都有 $b_ib_j=0$。因此非零项的位置只有两类。

第一类是恰有两个相邻位置非零。可选的内部相邻对为 $(2,3),(3,4),\dots,(98,99)$，共 97 对；两项分别属于奇、偶两组，故都只能取 450。

第二类是恰有三个连续位置非零，且中间位置单独属于一个奇偶组。中间位置可取 $3,4,\dots,98$，共 96 种；中间项必须为 450，两侧两个正整数之和为 450，有 449 种分法。

故达到最大值的数组共有

$97+96\cdot 449=43201$

组。

连续变量的端点调整

上一节的调整在整数点之间进行。若变量取实数并受闭区间限制，可利用凸性把变量逐个移到端点，从而把连续问题化为有限个端点配置。

基本结论设 $F(x_1,\dots,x_n)$ 定义在 $[l_1,u_1]\times\cdots\times[l_n,u_n]$ 上。固定其余变量后，若 F 关于每个 x_i 都为凸函数，则最大值可在 $x_i\in\{l_i,u_i\}$ $(1\le i\le n)$ 时取得。

证明　固定其余变量，凸函数在闭区间上的最大值可在端点取得。依次调整 $x_1,\dots,x_n$，函数值均不减，最后得到端点配置。

例 7 ｜端点调整

实数 $x_1,\dots,x_{25}$ 满足 $0\le x_i\le i$ $(1\le i\le 25)$。约定下标按模 25 计算，求

$S=\sum_{i=1}^{25}x_i^3-\sum_{i=1}^{25}x_ix_{i+1}x_{i+2}$

的最大值。

解答（PDF 中已展开）

分析　固定其余变量后，S 关于 x_i 是 $x_i^3-c_ix_i+C$，二阶导数为 $6x_i\ge 0$，所以最大值可逐个移到端点 $x_i=0$ 或 i。端点化以后，若三个循环相邻位置都非零，把其中下标最小的一项改为 0：损失的立方项为 j^3，而被删去的一个负三次乘积大于 j^3，故函数值反而增大。因此极值配置中任意三个循环相邻位置至少有一个为 0，所有三次乘积项随之消失。剩下只需在这个局部限制下保留尽可能大的立方权，并单独处理首尾的循环约束。

解答　固定除 x_i 外的其余变量。含 x_i 的三个乘积项为 $x_{i-2}x_{i-1}x_i$、$x_{i-1}x_ix_{i+1}$、$x_ix_{i+1}x_{i+2}$，故 $S=x_i^3-c_ix_i+C$，其中 $c_i=x_{i-2}x_{i-1}+x_{i-1}x_{i+1}+x_{i+1}x_{i+2}\ge 0$，而 C 与 x_i 无关。二阶导数为 $6x_i\ge 0$，所以该函数在 $[0,i]$ 上的最大值可在端点取得。依次调整可设 $x_i=i\varepsilon_i$，$\varepsilon_i\in\{0,1\}$。

若三个循环相邻的位置同时非零，从中取下标最小者 j，把 x_j 改为 0。立方项损失 j^3，而至少消去一个含 x_j 的负三次乘积；另外两个非零因子的值均大于 j，故被消去的乘积大于 j^3，从而 S 增大。所以极值时任意三个循环相邻的位置中至多有两个非零项，所有三次乘积项均为 0。

先设 $x_1=0$。把 $2,3,\dots,25$ 分成 $\{2,3,4\},\{5,6,7\},\dots,\{23,24,25\}$ 八组。每组至多有两个非零位置，因此

$S\le\sum_{r=0}^{7}\left[(3r+3)^3+(3r+4)^3\right]=75824.$

若 $x_1=1$，则 $24,25,1$ 三个循环相邻位置中 x_{24},x_{25} 不能同时非零。前七组三元组仍各至多有两个非零位置，最后一组至多贡献 25^3+23^3，故 $S\le 75824-24^3+23^3+1<75824$。

因此最大值为 75824。取 $x_1=x_2=x_5=x_8=\cdots=x_{23}=0$，其余 $x_i=i$，即可取等。

例 8 ｜ 2021 年土耳其 TST

求所有正整数 n，使存在实数 $x_1,\dots,x_n$，满足 $i\le x_i\le 2i$ $(1\le i\le n)$，且

$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}ix_i\right)^2}=\frac{27}{4n(n+1)(2n+1)}.$

解答（PDF 中已展开）

分析 记 $A=\sum x_i^2$，$B=\sum i^2$，$C=\sum i x_i$。区间条件给出 $(x_i-i)(x_i-2i)\le 0$，求和得到 $A+2B\le 3C$；另一方面，$(A-2B)^2\ge 0$ 等价于 $(A+2B)^2\ge 8AB$。两式合用正好得到题目给定的上界。若等号成立，则每一步都须取等：每个 x_i 只能是 i 或 $2i$，且 $A=2B$。于是问题化为从 $1^2,2^2,\dots,n^2$ 中选出若干项，使其和为总平方和的三分之一；必要性由模 9 得到，充分性则用长度 18 的平移构造。

解答 由 $(x_i-i)(x_i-2i)\le 0$ 求和得 $A+2B\le 3C$；又有 $(A+2B)^2\ge 8AB$，因此

$\frac{A}{C^2}\le \frac{9A}{(A+2B)^2}\le \frac{9}{8B}=\frac{27}{4n(n+1)(2n+1)}$.

题设取等，故 $x_i\in\{i,2i\}$ 且 $A=2B$。写 $x_i=i(1+\varepsilon_i)$，$\varepsilon_i\in\{0,1\}$，则

$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i i^2=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{18}.$ (1)

因此 $18\mid n(n+1)(2n+1)$。其中因子 2 由 $n(n+1)$ 自动提供，考察模 9 得 $n\equiv 0,4,8\pmod 9$。

为证充分性，按模 18 只需给出六个基例：

- $n=4$：$\{1,3\}$；$n=9$：$\{1,2,3,9\}$；
- $n=8$：$\{2,8\}$；$n=13$：$\{2,10,13\}$；
- $n=17$：$\{9,15,17\}$；$n=18$：$\{1,7,8,11,12,18\}$。

每个集合都表示 $\{i:\varepsilon_i=1\}$。若 n 已有构造，把 n 增加 18，并再选 $n+1,n+7,n+8,n+11,n+12,n+18$。由

$3\sum_{r\in\{1,7,8,11,12,18\}}(n+r)^2=\sum_{j=1}^{18}(n+j)^2$

知式 (1) 仍成立。故全部答案为 $n\equiv 0,4,8\pmod 9$。

“

注 这两例中，前者通过凸性逐坐标移到端点，后者则由上述实数不等式的等号条件确定端点取值。

互异整数的间隔

前两节通过调整限制变量的可能取值。若条件改为“两两不同”，排序后可直接得到间隔：$a_1<a_2<\cdots<a_n$ 时，$a_j-a_i\ge j-i$。下面分别将这一估计用于和式与循环二次型。

例 9 | 1999 年罗马尼亚 TST

设 $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{N}_+$ 两两不同。证明

$\sum_{k=1}^{n}a_k^2\ge\frac{2n+1}{3}\sum_{k=1}^{n}a_k.$

解答（PDF 中已展开）

分析 原式对称，先令 $a_1<\cdots<a_n$。归纳中需要的不只是 $a_k\ge k$，更重要的是 $a_k\le a_{n+1}-(n+1-k)$，它给出相对于最大项的整段间隔。采用归纳时，加入 a_{n+1} 后，右端系数由 $(2n+1)/3$ 变为 $(2n+3)/3$；所需补偿项正好涉及 $\sum_{k=1}^{n}a_k$。用上述间隔估计这个前缀和，最后只剩关于 a_{n+1} 的二次式，并可分解为两个非负因子。

解答 对 n 归纳。$n=1$ 时显然成立。设结论对 n 成立，并令 $a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}$。由归纳假设，只需证明

$a_{n+1}^2\ge\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{2n+3}{3}a_{n+1}$.

由整数互异性 $a_k\le a_{n+1}-(n+1-k)$，故 $\sum_{k=1}^{n}a_k\le na_{n+1}-\frac{n(n+1)}{2}$。于是只需验证

$3a_{n+1}^2-(4n+3)a_{n+1}+n(n+1)=(a_{n+1}-n-1)(3a_{n+1}-n)\ge 0,$

这由 $a_{n+1}\ge n+1$ 立即得到。归纳完成。

若原式取等，则上述各步均取等，递推可得排序后的数列为 $1,2,\ldots,n$。

互异整数给出的间隔还可以与拉格朗日恒等式结合：先把两个和式的乘积改写成两两差的平方和，再用 $a_j-a_i\ge j-i$ 把变量本身消去，只留下由下标决定的确定下界。

例 10 | 2016 年朝鲜 TST

求最大的实数 λ，使任意互不相同的正整数 $a_1,\ldots,a_n$ 均满足

$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^6+a_k^3}\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\ge\lambda n^2(n^2-1).$

解答（PDF 中已展开）

分析 先用 $\sqrt{a_k^6+a_k^3}\ge a_k^3$，左端便出现 $(\sum 1/a_k)(\sum a_k^3)-(\sum a_k)^2$，可以直接套用拉格朗日恒等式。排序后有 $a_j-a_i\ge j-i$，而 $(a_i+a_j)^2/(a_ia_j)\ge 4$，于是变量间的差可用下标差统一控制。为检验常数是否最优，取相邻整数整体平移到很大的位置：此时间隔始终为最小的 1，系数趋于 4，根式中被舍去的部分对总式的影响趋于 0。

解答 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$。由于 $\sqrt{a_k^6+a_k^3}\ge a_k^3$，原式左端不小于

$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^3\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2.$

取 $x_k=1/\sqrt{a_k}$、$y_k=a_k^{3/2}$，由拉格朗日恒等式，

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^3\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\\&=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{(a_i+a_j)^2}{a_ia_j}(a_i-a_j)^2\\&\ge 4\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2\ge 4\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)^2.\end{aligned}$$

又

$\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)^2=\sum_{d=1}^{n-1}(n-d)d^2=\frac{n^2(n^2-1)}{12}$,

故 $\lambda=\frac{1}{3}$ 对所有 n 都成立。

下面说明常数不能更大。固定 $n=2$，取 $a_1=X+1$，$a_2=X+2$，令 $X\to\infty$。此时 $(a_1+$

$a_2)^2/(a_1a_2)\to 4$，且 $\sqrt{a_k^6+a_k^3}-a_k^3\to\frac12$；再乘以 $\sum 1/a_k$ 后，这部分误差趋于 0。因此题目左端趋于 4，而 $n^2(n^2-1)=12$，故任何 $\lambda>\frac13$ 都不可能成立。于是

$\lambda_{\max}=\frac13$.

例 11 ｜循环二次型

正整数 $n\ge 2$，整数 $x_1,\dots,x_n$ 两两不同，约定 $x_{n+1}=x_1$。求

$F=\sum_{i=1}^n x_i^2-\sum_{i=1}^n x_ix_{i+1}$

的最小值。

解答（PDF 中已展开）

分析　先写成 $F=\frac12\sum(x_i-x_{i+1})^2$。自然顺序 $1,2,\dots,n$ 的首尾差过大；若按奇数递增、偶数递减排成一圈，相邻差只出现 $1,2$，可得到值 $2n-3$，由此猜测最小值。下界适合用归纳：删去当前最大元并把它的两个邻点相连，函数值减少量为 $(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_1)$。两个因子是不同的正整数，乘积至少为 2，所以每增加一个元素，下界至少增加 2，与构造完全吻合。

解答　对 n 归纳。$n=2$ 时 $F=(x_1-x_2)^2\ge 1=2n-3$。设结论对 n 成立。对 $n+1$ 个数，循环平移下标后可设 x_{n+1} 为最大元。删去 x_{n+1}，把 x_n 与 x_1 相连，所得表达式记为 F_n。则

$F_{n+1}-F_n=(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_1)$.

两个因子是不同的正整数，故乘积至少为 2，从而 $F_{n+1}\ge(2n-3)+2=2(n+1)-3$。

取 $1,2,\dots,n$，按 $1,3,5,\dots,$最大奇数,最大偶数,$\dots,4,2$ 的顺序排成一圈。恰有两个相邻差为 1，其余 $n-2$ 个相邻差为 2，故 $F=2n-3$。因此 $F_{\min}=2n-3$。

“

注　若要进一步讨论等号排列，只需继续追踪归纳中的等号条件：每次删去当前最大元时，两个正整数因子的乘积都必须等于 2，因而只能分别为 $1,2$。

整数差分与平方差恒等式

含固定步长的交叉项时，常先利用恒等式把原式改写为差分平方和。常用恒等式为

$2x_k(x_k-x_{k-r})=(x_k-x_{k-r})^2+x_k^2-x_{k-r}^2$, $2a_ia_{i+r}=a_i^2+a_{i+r}^2-(a_{i+r}-a_i)^2$.

对任意整数 d 都有 $d^2\ge d$；差分题中常见 $d\in\mathbb{Z}_{\ge0}$，且等号只在 $d=0,1$ 时成立。因此这一估计既可给出下界，也能限制等号时的差分。

例 12 ｜ 2017 年土耳其

正整数 $1=x_0\le x_1\le\cdots\le x_{2017}$，且 $x_1,\dots,x_{2017}$ 恰有 25 个不同取值。证明

$\sum_{k=2}^{2017}x_k(x_k-x_{k-2})\ge 623$,

并求等号成立的数列个数。

解答（PDF 中已展开）

分析 先用恒等式 $2x_k(x_k-x_{k-2})=(x_k-x_{k-2})^2+x_k^2-x_{k-2}^2$。求和后，大部分平方项相消，只剩二步差分平方和与末端项。由于数列单调且为整数，$d_k=x_k-x_{k-2}$ 是非负整数，所以 $d_k^2\geq d_k$。又因 $x_1,\ldots,x_{2017}$ 恰有 25 个不同值，若 $x_1=u$，则至少有 $x_{2016}\geq u+23$、$x_{2017}\geq u+24$，从而得到数值下界。等号计数还需把二步差分拆成一阶差分 $e_j=x_{j+1}-x_j$：条件 $e_j+e_{j+1}\in\{0,1\}$ 等价于 $e_j\in\{0,1\}$ 且相邻两个 1 不能同时出现。

解答 记 $S=\sum_{k=2}^{2017}x_k(x_k-x_{k-2})$。由

$2x_k(x_k-x_{k-2})=(x_k-x_{k-2})^2+x_k^2-x_{k-2}^2$,

求和得

$$\begin{aligned}2S&\geq\sum_{k=2}^{2017}(x_k-x_{k-2})+x_{2016}^2+x_{2017}^2-x_0^2-x_1^2\\&=x_{2016}+x_{2017}-x_0-x_1+x_{2016}^2+x_{2017}^2-x_0^2-x_1^2.\end{aligned}$$

设 $x_1=u$。由恰有 25 个不同取值，$x_{2016}\geq u+23$，$x_{2017}\geq u+24$。又 $x_0=1$，故 $2S\geq u^2+95u+1150\geq 1246$，即 $S\geq 623$。

取等时必须有 $x_1=1$，$x_{2016}=24$，$x_{2017}=25$，且 $x_k-x_{k-2}\in\{0,1\}$ $(2\leq k\leq 2017)$。令 $e_j=x_{j+1}-x_j$ $(0\leq j\leq 2016)$。于是 $e_j\in\{0,1\}$，相邻两个 e_j 不能同时为 1。由 $x_0=x_1=1$ 得 $e_0=0$；又 $x_{2016}=24$、$x_{2017}=25$，且 $x_{2017}-x_{2015}\leq 1$，故 $x_{2015}=24$，从而 $e_{2015}=0$、$e_{2016}=1$。此外 $\sum_{j=0}^{2016}e_j=24$。除固定的 $e_{2016}=1$ 外，只需在 $e_1,\ldots,e_{2014}$ 中选出 23 个互不相邻的位置，故等号数列共有

$\binom{2014-23+1}{23}=\binom{1992}{23}$

个。

例 13 | 2019 年全国高中数学联赛 A 卷加试第 2 题

设整数 $1=a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_{2019}=99$。记

$f=\sum_{i=1}^{2019}a_i^2-\sum_{i=1}^{2017}a_ia_{i+2}$.

求 f 的最小值，并求达到最小值的数组个数。

解答（PDF 中已展开）

分析 恒等式把原式写成端点平方项与二步差分平方和。若把所有平方差都用 $d^2\geq d$ 线性化，最后从 a_{2017} 到固定端点 99 的信息也被削弱，所得下界不够。应保留最后一项 $(99-a_{2017})^2$，只处理前 2016 个二步差分；相消后得到关于 a_{2017} 的完整二次式，最低点在 49。等号时奇、偶两条子序列都从 1 逐级到 49，所以每个 $1,\ldots,49$ 至少出现两次；计数便转化为这些数的额外出现次数。

解答 由恒等式

$2f=a_1^2+a_2^2+a_{2018}^2+99^2+\sum_{i=1}^{2017}(a_{i+2}-a_i)^2$.

对 $1\leq i\leq 2016$ 有 $(a_{i+2}-a_i)^2\geq a_{i+2}-a_i$，又 $a_1^2\geq a_1$，$a_2^2\geq a_2$，故

$$\begin{aligned}2f &\geq a_{2018}^2 + a_{2018} + a_{2017} + 99^2 + (99 - a_{2017})^2 \\ &\geq a_{2017}^2 + 2a_{2017} + 99^2 + (99 - a_{2017})^2 \\ &= 2(a_{2017} - 49)^2 + 14800.\end{aligned}$$

所以 $f \geq 7400$。

取等时必须有 $a_1 = a_2 = 1$，$a_{2017} = a_{2018} = 49$，并且 $a_{i+2} - a_i \in \{0, 1\}$ $(1 \leq i \leq 2016)$。因此前 2018 项中每个整数 $1, \ldots, 49$ 都至少出现两次。设等于 r 的项有 x_r 个，令 $y_r = x_r - 2 \geq 0$，则 $\sum_{r=1}^{49} y_r = 1920$。反过来，给定任意一组 $y_r \geq 0$ 且总和为 1920，按 $1, 2, \ldots, 49$ 依次重复 $2 + y_r$ 次得到的非降数列中，每个数至少连续出现两次，故所有二步差分都为 0 或 1，且第 $2017, 2018$ 项均为 49；因此它确实给出且唯一给出一个取等数列。由隔板法，取等数组共有

$\binom{1920+49-1}{49-1} = \binom{1968}{48}$

个。故最小值为 7400。

“

注 本题保留关键端点平方项，再由等号条件转化为出现次数问题；这是 $d^2 \geq d$ 与端点信息同时使用的常见用法。

单调条件下的辅助式构造

连续估计有时只能给出粗界，却能提供取等位置的线索。若题设还带有单调条件，可以据此构造辅助多项式；辅助式不必在每个整数点都非负，只要少数负项能由邻点的正项和单调关系补偿即可。

例 14 | 2022 年全国高中数学联赛 A 卷二试第 3 题

设 $a_1, \ldots, a_{100}$ 为非负整数，满足：存在正整数 $t \leq 100$，使

$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_t,\ a_{t+1} = \cdots = a_{100} = 0,$

且

$\sum_{k=1}^{100} a_k = 100,\ \sum_{k=1}^{100} k a_k = 2022.$

求 $\sum_{k=1}^{100} k^2 a_k$ 的最小值。

解答（PDF 中已展开）

分析 记 $T = \sum k^2 a_k$。柯西不等式给出 $T \geq 40885$，而平均下标为 $2022/100 = 20.22$，所以柯西等号所要求的单点集中不可能发生。用拉格朗日恒等式衡量偏离等号的程度：

$100T - 2022^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 100} (i - j)^2 a_i a_j.$

右端说明非零位置相隔越远，代价越大。又因 $a_1 \leq \cdots \leq a_t$，正项一旦出现便连续延伸到 t，因此可先考察非零项最少的情形。

若只有一个非零项，其下标必须等于 20.22，不可能。若只有两个非零项，它们必在相邻的 $20, 21$ 处；由两个和式条件得到 $(a_{20}, a_{21}) = (78, 22)$，与 $a_{20} \leq a_{21}$ 矛盾。若恰有三个非零项，它们位

于连续的 $r, r+1, r+2$。由加权平均 20.22 可知 $r \in \{19, 20\}$。若 $r = 20$，则 $a_{21} + 2a_{22} = 22$，所以 $a_{22} \le 11$；再由 $a_{20} \le a_{21} \le a_{22}$ 得三项之和至多 33，与总和 100 矛盾。故只能有 $r = 19$。设 $a_{19} = x$，则 $a_{20} = 78 - 2x$、$a_{21} = x + 22$，单调性给出 $19 \le x \le 26$。此时拉格朗日余项为 $200x + 1716$，故在 $x = 19$ 时最小，得到候选 $(19, 40, 41)$，对应 $T = 40940$。

以上只确定了三个非零项时的最优候选。对更多非零项不再分类，直接围绕候选位置构造辅助式。设 $f(k) = (k-19)(k-\alpha)$；希望 $20, 21$ 两处的误差等大反号，即 $f(20) = -f(21)$，解得 $\alpha = 62/3$。于是 $f(k) = (k - 19)(k - 62/3)$，它只在 $k = 20$ 处为负，且 $f(20) = -2/3$、$f(21) = 2/3$。由 $t \ge 21$ 和 $a_{20} \le a_{21}$，这个负项可由 $k = 21$ 处的正项补偿，从而得到对全部可行数组成立的下界。

解答 候选结构为 $(a_{19}, a_{20}, a_{21}) = (19, 40, 41)$，因此取过 19 为零点，并让相邻的 $20, 21$ 处误差等大反号，得到下面的辅助式。先说明 a_{21} 位于单调段中。若 $t \le 20$，则

$\sum_{k=1}^{100} k a_k \le 20 \sum_{k=1}^{100} a_k = 2000 < 2022,$

矛盾。故 $t \ge 21$，从而 $a_{20} \le a_{21}$。

令

$f(k) = (k - 19)\left(k - \frac{62}{3}\right) = k^2 - \frac{119}{3}k + \frac{1178}{3}.$

对整数 k，有

$f(19) = 0, \qquad f(20) = -\frac{2}{3}, \qquad f(21) = \frac{2}{3},$

并且当 $k \le 18$ 或 $k \ge 22$ 时 $f(k) > 0$。因此

$\sum_{k=1}^{100} f(k) a_k \ge -\frac{2}{3} a_{20} + \frac{2}{3} a_{21} \ge 0.$

展开并代入两个已知矩条件，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} k^2 a_k &\ge \frac{119}{3} \sum_{k=1}^{100} k a_k - \frac{1178}{3} \sum_{k=1}^{100} a_k \\ &= \frac{119}{3} \cdot 2022 - \frac{1178}{3} \cdot 100 = 40939\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

左边是整数，所以

$\sum_{k=1}^{100} k^2 a_k \ge 40940.$

取

$a_{19} = 19, \qquad a_{20} = 40, \qquad a_{21} = 41,$

其余各项均为 0，则

$19 + 40 + 41 = 100, \qquad 19 \cdot 19 + 20 \cdot 40 + 21 \cdot 41 = 2022,$

且满足题设单调条件；此时平方加权和等于 40940。故最小值为

$\boxed{40940}$.

“

注 拉格朗日恒等式用于定位候选的非零位置并找出 $(19, 40, 41)$；辅助二次式再给出对所有可行数组都成立的下界。辅助式在 20 处的唯一负值，由 $a_{20} \le a_{21}$ 与 21 处的

正值抵消。

整体整数性与取整

有些题中，整数性作用于目标量或某个整体参数。若 $S\in\mathbb{Z}$ 且 $S<M+1$，则立即有 $S\le M$；含取整符号时，则常把整数部分与小数部分分开处理。

利用目标量的整数性

例 15 ｜ 2023 年猿辅导

设 $x_1,\dots,x_{20}\in\mathbb{N}_+$，且 $\sum_{i=1}^{20}x_i=2023$。下标按模 20 计算，记 $S_k=\sum_{i=1}^{20}x_ix_{i+k}$。若 $S_1\ge S_2\ge\cdots\ge S_9\ge S_{10}$，求 S_9 的最小值与最大值。

解答（PDF 中已展开）

分析 最小值与最大值用到的信息不同。求最小值时，直接对 S_9 中每一项使用 $ab\ge a+b-1$，循环求和后每个 x_i 恰出现两次，立即得到下界；“一个数大、其余全为 1” 可同时满足等号和单调条件。求最大值时，要把所有 S_k 放在一起：展开 $(\sum x_i)^2$ 得 $S_0+2S_1+\cdots+2S_9+S_{10}=2023^2$，而单调性给出 $\sum_{k=1}^{9}S_k\ge 9S_9$。再用柯西不等式控制 S_0+S_{10}，得到一个非整数上界，最后利用 $S_9\in\mathbb{Z}$ 取整。

解答 对每个 i，$x_ix_{i+9}\ge x_i+x_{i+9}-1$，故 $S_9\ge 2\sum_{i=1}^{20}x_i-20=4026$。取一个 $x_i=2004$、其余均为 1，此时 $S_1=S_2=\cdots=S_{10}=4026$，满足题设的单调条件并取等，故 $S_{9,\min}=4026$。

再求最大值。记 $S_0=\sum_{i=1}^{20}x_i^2$。由循环下标计数可得 $S_0+2\sum_{k=1}^{9}S_k+S_{10}=2023^2$，$\sum_{k=1}^{9}S_k\ge 9S_9$。另一方面，由柯西不等式，

$S_0+S_{10}=\sum_{i=1}^{10}(x_i+x_{i+10})^2\ge\frac{2023^2}{10}$.

因此 $18S_9\le\frac{9}{10}2023^2$，即 $S_9\le 204626.45$。由于 S_9 为整数，$S_9\le 204626$。

取 19 个 101 和一个 104。对任意 $1\le k\le 10$，都有 $S_k=18\cdot 101^2+2\cdot 101\cdot 104=204626$，故 $S_{9,\max}=204626$。

利用小数部分的和

例 16 ｜ 2015 年中国西部数学邀请赛

给定正整数 $n\ge 2$。实数 $x_1,\dots,x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}x_i\in\mathbb{Z}$。记 $d_i=\min_{m\in\mathbb{Z}}|x_i-m|$。求 $\sum_{i=1}^{n}d_i$ 的最大值。

解答（PDF 中已展开）

分析 令 $t_i=\{x_i\}$。因为 $\sum x_i$ 是整数，$m=\sum t_i$ 也是整数。到最近整数的距离为 $d_i=\min(t_i,1-t_i)$，故同时有 $\sum d_i\le m$ 和 $\sum d_i\le n-m$，于是只需在整数 m 上最大化 $\min(m,n-m)$。取等时应使 m 尽量接近 $n/2$，并让各个小数部分尽量等于 $1/2$；奇数个变量时留一个小数部分为 0 即可。

解答 令 $t_i=\{x_i\}\in[0,1)$，则 $d_i=\min\{t_i,1-t_i\}$。又 $m:=\sum_{i=1}^n t_i\in\mathbb{Z}$。逐项有 $d_i\le t_i$ 和 $d_i\le 1-t_i$，故

$\sum_{i=1}^n d_i\le\min\{m,n-m\}\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$.

若 n 为偶数，取所有 $t_i=1/2$；若 n 为奇数，取 $n-1$ 个 $t_i=1/2$ 和一个 $t_i=0$，均可达到上界。故最大值为 $\lfloor n/2\rfloor$。

例 17 | 2018 年春季新星数学奥林匹克

非负实数 $x_1,\dots,x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n x_i=n$。记 $A=\sum_{i=1}^n\lfloor x_i\rfloor$，$B=\sum_{i=1}^n\{x_i\}$。求 AB 的最大值。

解答（PDF 中已展开）

分析 由 $x_i=\lfloor x_i\rfloor+\{x_i\}$ 求和，得到 $A+B=n$。由于 A 是整数，$B=n-A$ 也是非负整数，因此目标只依赖两个整数参数 A,B。固定和为 n 时，整数乘积在两数尽量接近时最大，所以上界是 $\lfloor n^2/4\rfloor$。还需给出实现该整数分拆的具体 x_i；用若干个 $3/2$ 与 $1/2$，奇数情形再添一个 1 即可。

解答 由 $A+B=n$，

$AB=A(n-A)=\frac{n^2}{4}-\left(A-\frac{n}{2}\right)^2\le\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$.

若 $n=2q$，取 q 个 $3/2$、q 个 $1/2$；若 $n=2q+1$，取 q 个 $3/2$、q 个 $1/2$ 和一个 1。两种情形都达到上界，故最大值为 $\lfloor n^2/4\rfloor$。

取整差的分解

当表达式中出现 $\lfloor x_{i+1}-x_i\rfloor$ 时，直接比较两个实数并不方便。把每个 x_i 分成整数部分和小数部分后，整数部分的差可以直接相消，而小数部分只会贡献 0 或 -1，于是问题转化为统计小数部分序列的下降次数。

例 18 | 2014 年中国女子数学奥林匹克

若 $\lfloor x_1\rfloor,\dots,\lfloor x_n\rfloor$ 恰为 $1,2,\dots,n$ 的一个排列，求

$\sum_{i=1}^{n-1}\lfloor x_{i+1}-x_i\rfloor$

的最大值与最小值。

解答（PDF 中已展开）

分析 写 $x_i=m_i+t_i$，其中 $m_i=\lfloor x_i\rfloor$、$0\le t_i<1$。因为 $t_{i+1}-t_i\in(-1,1)$，有 $\lfloor x_{i+1}-x_i\rfloor=m_{i+1}-m_i$，或在 $t_{i+1}<t_i$ 时再减 1。求和后整数部分只剩首尾差 m_n-m_1，小数部分只留下下降次数 D，原式即 m_n-m_1-D。最大值要同时取最大的首尾差和最少的下降；最小值则相反。由于 m_i 是 $1,\dots,n$ 的排列，这两种安排都能实现。

解答 写

$x_i=m_i+t_i,\qquad m_i=\lfloor x_i\rfloor,\quad 0\le t_i<1.$

则

$\lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor = m_{i+1} - m_i - \mathbf{1}_{\{t_{i+1}<t_i\}}$.

令 $D = \#\{\, i : 1 \le i \le n-1,\ t_{i+1} < t_i \,\}$，求和得

$\sum_{i=1}^{n-1} \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor = m_n - m_1 - D$.

由于 $m_1, \ldots, m_n$ 是 $1, \ldots, n$ 的一个排列，$m_n - m_1 \le n-1$ 且 $D \ge 0$，所以原和不超过 $n-1$。取 $m_1 = 1, m_n = n$，并令所有 $t_i = 0$，即可达到 $n-1$。

另一方面，$m_n - m_1 \ge 1-n$ 且 $D \le n-1$，故原和不小于 $-2(n-1)$。取 $m_1 = n, m_n = 1$，其余 m_i 任意排列剩余整数，并令 $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$（例如 $t_i = (n-i+1)/(n+1)$），则 $D = n-1$，从而达到 $-2(n-1)$。

因此最大值为 $n-1$，最小值为 $-2(n-1)$。

小结

全文中的整数条件主要以五种方式进入证明：

1. **正整数的基线**。$ab \ge a+b-1$ 联系乘积与和，$a_i \ge 1$ 控制部分和的最小增长。例 1--3 属于这一类。

2. **固定和与端点结构**。固定和时，单位调整常使整数变量集中在相邻整数；区间内的实变量则可借助凸性或等号条件移到端点。例 4--8 先确定可能的极值结构，再计算极值。

3. **互异整数的间隔**。排序后有 $a_j - a_i \ge j - i$。例 9、10 把间隔代入和式或拉格朗日恒等式，例 11 则在循环中删除最大元，把新增量化为两个不同正整数之积。

4. **整数差分、单调性与辅助式**。对非负整数差 d 有 $d^2 \ge d$，等号只在 $0, 1$。例 12、13 由此同时得到下界和等号结构；例 14 先找候选位置，再利用单调关系补偿辅助式中的唯一负值。

5. **整体整数性与小数部分**。有时离散参数不是单个变量，而是目标量、整数部分之和或小数部分之和。例 15--18 分别使用了目标量取整、整数部分与小数部分的分解等方法。

实际处理时，通常先看实数问题的等号位置，再判断整数条件落在哪个量上；放缩时保留与取等有关的端点信息，找到候选后再用构造或全局不等式验证。不少题目的关键并不是把估计做得更强，而是保留正确的离散信息。