一道不等式问题的简解

2026-10-15　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3a6be0b3cba0b087

个人感觉做得比 GPT 要简洁不少（见图 2），题目为戴安娜的梦老师原创，戴老师在数之谜上最近出了很多非常优雅的原创题，推荐大家试一试。

题目

设整数 $n \geq 5$，实数 $a_1, \ldots, a_n$ 的和为 0，且对任意互不相同的下标 i, j, k，都有

$$a_j(a_i + a_k) \geq -1.$$

求

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

的最大值。

解答（PDF 中已展开）

简解

不妨设

$$a_1 = M = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| > 0, \qquad a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n.$$

记 $a_2 = -b$，$a_3 = -c$，则 $b \geq c$。由题设，

$$M(b + c) \leq 1.$$

又对任意 $i \neq 2$，均有 $a_i + c \geq 0$，且

$$a_2 + c = c - b \leq 0.$$

于是

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + c) \\
&\le M \sum_{i=1}^{n} |a_i + c| \\
&= M\big[nc + 2(b - c)\big] \\
&= M\big[2b + (n-2)c\big] \\
&= \frac{n}{2} M(b + c) - \frac{n-4}{2} M(b - c) \\
&\le \frac{n}{2} M(b + c) \\
&\le \frac{n}{2}.
\end{aligned}
$$

取等

取

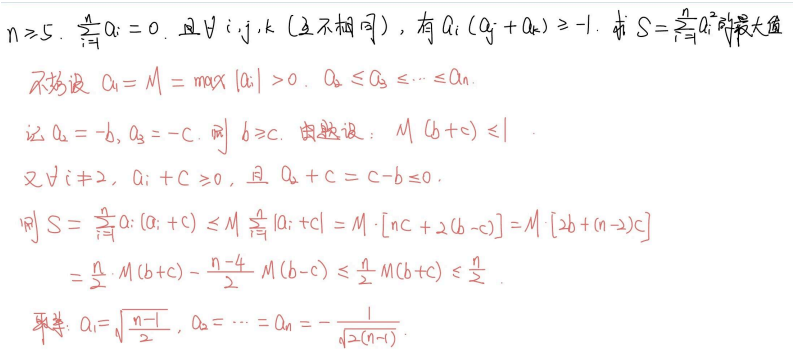
$$
a_1 = \sqrt{\frac{n-1}{2}}, \qquad a_2 = \cdots = a_n = -\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}},
$$

即可取到等号。因此，S 的最大值为

$$
\boxed{\frac{n}{2}}.
$$

解答原图

以下两张原图均包含完整解答。



平方和最值问题解答

A5

整数 $n \geq 5$，实数 $a_1, \ldots, a_n$ 的和为 0，且对任意互不相同的下标 i, j, k，都有

$$a_j(a_i + a_k) \geq -1.$$

求 $S = a_1^2 + \cdots + a_n^2$ 的最大值。

解 最大值为 $\boxed{\frac{n}{2}}$。下面证明上界，并给出取等的例子。

若各项全为 0，结论显然成立。否则，记

$$x = \max_i a_i > 0, \qquad y = -\min_i a_i > 0, \qquad T = \sum_{a_i \geq 0} a_i = -\sum_{a_i < 0} a_i.$$

由 $(x - a_i)(y + a_i) \geq 0$ 及 $\sum_i a_i = 0$，得到 $S \leq nxy$；又对非负项用 $a_i^2 \leq xa_i$，对负项用 $a_i^2 \leq -ya_i$，得到

$$S \leq nxy, \qquad S \leq (x + y)T. \tag{1}$$

设非负项有 p 个（含零项），负项有 q 个，则 $p + q = n$。固定分别取得 x 和 $-y$ 的两个下标。对其余每个非负项，题设给出 $y(x + a_i) \leq 1$；对其余每个负项，题设给出 $x(y - a_i) \leq 1$。分别求和，得

$$y((p-1)x + T - x) \leq p - 1,$$
$$x((q-1)y + T - y) \leq q - 1.$$

若 $p = 1$ 或 $q = 1$，相应式子就是空和所得的 $0 \leq 0$，仍然成立。将这两式相加可得

$$(x + y)T + (n - 4)xy \leq n - 2. \tag{2}$$

结合 (1)、(2) 及 $n \geq 5$，有

$$\frac{2(n-2)}{n} S = S + (n-4)\frac{S}{n} \leq (x + y)T + (n-4)xy \leq n - 2,$$

故 $S \leq n/2$。

最后取

$$c = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}, \qquad a_1 = -(n-1)c, \qquad a_2 = \cdots = a_n = c.$$

显然各项和为 0。若 $j = 1$，则 $a_j(a_i + a_k) = -2(n-1)c^2 = -1$；若 $j \neq 1$，则该乘积为 $2c^2$ 或 $-(n-2)c^2$，均不小于 -1。因此此组数满足所有条件，而且

$$S = (n-1)^2 c^2 + (n-1)c^2 = \frac{n}{2}.$$

综上，所求最大值为 $\boxed{\frac{n}{2}}$。