2022 年匈牙利 Kürschák József 数学竞赛

2022-10-09 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3ac4bfff4e388b23

匈牙利是数学竞赛的发源地，而 Kürschák József 数学竞赛是全球范围内历史最悠久的数学竞赛.

1. 将一个正方形划分为 2022 个矩形，其中任意两个矩形在正方形内部没有公共顶点. 由这些矩形的边能组成多少条不同长度的线段?

2. 设 p 和 q 均为 $4k+3$ 型的素数. 假设存在非零整数 x 和 y 满足 $x^2-pqy^2=1$. 求证：存在正整数 a 和 b 满足 $|pa^2-qb^2|=1$.

3. n^2 个实数 $a_{i,j}$（$1\le i\le n$，$1\le j\le n$）满足对任意 i 和 j，$a_{i,j}+a_{j,i}=0$（特别地，对任意 i，$a_{i,i}=0$）. 求证：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right)^2\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2.$$