20 道用阿贝尔变换证明的不等式

2021-12-18 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3b3cce925ef62144

阿贝尔分部求和公式：

令 $S_0=0$，$S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$ $(1\leq k\leq n)$，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}S_k\left(b_k-b_{k+1}\right)+b_nS_n.$$

证明：注意到 $S_0=0$，则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k&=\sum_{k=1}^{n}\left(S_k-S_{k-1}\right)b_k\\&=\sum_{k=1}^{n}S_kb_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_kb_{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}S_k\left(b_k-b_{k+1}\right)+S_nb_n\end{aligned}$$

从而结论成立．以下为一些可以用阿贝尔变换证明的不等式：

1. (阿贝尔不等式) 设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 和 $y_1\geq y_2\geq\cdots\geq y_n\geq 0$ 是实数，记 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}x_i,1\leq k\leq n$，设 $M=\max\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$，$m=\min\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$，则

$$my_1\leq x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\leq My_1.$$

2. (排序不等式) 设 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$，$b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$．$c_1$，$c_2$，$\cdots$，$c_n$ 为 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 的一个排列，则

$$\begin{aligned}&a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\\\leq&a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n\\\leq&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\end{aligned}$$

1. (改进切比雪夫不等式) 设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 和 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 是实数，且

$$\begin{aligned}a_1\geq\frac{a_1+a_2}{2}\geq\cdots\geq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\b_1\geq\frac{b_1+b_2}{2}\geq\cdots\geq\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\end{aligned}$$

证明:

$$\begin{aligned}&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\\geq&\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\end{aligned}$$

1. (Karamata 不等式) 若 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$, $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n$, 且 $a_1\geq b_1$, $a_1+a_2\geq b_1+b_2$, $\cdots$, $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\geq b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}$, $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$. f 为一个下凸函数, 则

$$\begin{aligned}&f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\\\geq&f(b_1)+f(b_2)+\cdots+f(b_n).\end{aligned}$$

若 f 为上凸函数, 则不等号反向.

1. 给定正整数 n, 对任意 $1\leq k\leq n$, 正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_k\leq k$, 证明:

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}\leq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

1. (1978 年 IMO) 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不同的自然数, 证明:

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geq1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

1. (1999 年 APMO) 设 $a_1,a_2,\cdots$ 是正实数列, 且对所有 $i,j=1,2,\cdots$, 满足 $a_{i+j}\leq a_i+a_j$, 证明:

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\geq a_n,n\in\mathrm{N}^+.$$

1. 给定实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$, 记 $M=\max\limits_{1\leq k\leq n}|a_k-a_{k+1}|$, 证明:

$$\left|\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k-\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n+1}a_k\right|\leq\frac{M}{2}.$$

1. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为实数, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geq\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{i+1}+\frac{3}{2(n+1)^3}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2.$$

1. (钟开莱不等式) 给定整数 $n \geq 2$, 设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$, 且对任意 $1 \leq k \leq n$, 有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_k$, 求证:

- $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$;
- $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 \leq a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + \cdots + a_n b_n^2$.

1. (1994 年 USAMO) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数, 且对任意正整数 n, 有 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt{n}$, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right).$$

1. (2018 年清华飞测) 对任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 设正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n^2$, 证明:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} > \frac{1}{4} \log_2 n.$$

1. 设 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} = 0$, 证明

$$\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i+1}}\right).$$

2. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, 且

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 \leq b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_k^2, k = 1, 2, \cdots, n$$

证明:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

1. 对 $1 \leq i \leq n$, 令 a_i 与 b_i 为实数, 且满足 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$,

$$\begin{aligned} b_1 &\geq a_1 \\ b_1 b_2 &\geq a_1 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 &\geq a_1 a_2 a_3 \\ &\vdots \\ b_1 b_2 \cdots b_n &\geq a_1 a_2 \cdots a_n \end{aligned}$$

证明:

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\geq a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

16. (2008 年 CMO) 给定正整数 n，及实数 $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n$，$y_1\geq y_2\geq\cdots y_n$，满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}ix_i=\sum\limits_{i=1}^{n}iy_i$. 证明：对任意实数 α，有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i[i\alpha]\geq\sum_{i=1}^{n}y_i[i\alpha].$$

(2013 年 CTST) 设 n，k 为给定的大于 1 的整数，非负实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n；c_1，c_2，$\cdots$，c_n 满足：$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，$c_1+c_2+\cdots+c_m\leq m^k$，$m=1,2,\cdots,n$. 求最大值：

$$c_1a_1^k+c_2a_2^k+\cdots+c_na_n^k.$$

(1987 年 CTST) 已知数列 $\{r_n\}$ 满足：$r_1=2$，$r_n=r_1r_2\cdots r_{n-1}+1$，$n\geq 2$. 自然数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 满足 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<1$. 求证：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leq\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_n}.$$

(2000 年 RMO) 设 $-1<x_1<x_2<\cdots<x_n<1$，$y_1<y_2<\cdots<y_n$，且

$$x_1^{13}+x_2^{13}+\cdots+x_n^{13}=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

证明

$$x_1^{13}y_1+x_2^{13}y_2+\cdots+x_n^{13}y_n<x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

(1994 年 USAMO) 设 a_1，a_2，$\cdots$ 是正实数数列，对所有的 $n\geq 1$ 满足条件 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\geq\sqrt{n}$. 证明对所有的 $n\geq 1$，

$$\sum_{j=1}^{n}a_j^2>\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}).$$