2021 年德国数学奥林匹克解答

2021-06-26　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3b73907e22531d37

试题见：2021 德国数学奥林匹克中文翻译

1. 求所有实数 a, b, c, d, 使得 a, b 为 $2x^2-3cx+8d$ 的两个互异根, 且 c, d 为 $2x^2-3ax+8b$ 的两个互异根.

解答（PDF 中已展开）

解由韦达定理知：$a+b=\dfrac{3c}{2}$，$ab=4d$，$c+d=\dfrac{3a}{2}$，$cd=4b$.

由 $ab=4d$ 和 $cd=4b$ 知 $abcd=16bd$. 于是 $bd=0$，或 $ac=16$.

若 $bd=0$，则 $b=d=0$，此时有 $a=\dfrac{3c}{2}$，$c=\dfrac{3a}{2}$，于是 $a=c=0$，矛盾！于是 $ac=16$.

于是 $a+b=\dfrac{3c}{2}=\dfrac{3\cdot\frac{16}{a}}{2}$，即 $a^2+ab=24$;

$\dfrac{3a}{2}=c+d=\dfrac{16}{a}+\dfrac{ab}{4}$，即 $6a^2=64+a^2b$.

因此 $6a^2=64+a\cdot(24-a^2)$ 即 $a^3+6a^2-24a-64=0$，也即 $(a+8)(a+2)(a-4)=0$.

故满足题意的 (a,b,c,d) 为 $(-8,5,-2,10)$ 或 $(-2,-10,-8,-5)$ 或 $(4,2,4,2)$.

1. 凸四边形 $ABCD$ 中，P，Q，R，S 分别在边 AB，BC，CD，DA 上. 求证：以下两个命题等价：

- 存在四边形 $PQRS$，P，Q，R，S 分别在线段 AB，BC，CD，DA 上，且不为顶点，使得周长最小.
- A，B，C，D 四点共圆，且圆心在四边形内部.

证明见万宏老师的文章《【解题笔记】2021 德国数学奥林匹克 T2》

1. 对给定的正整数 $k\in[4,9]$，设所有十进制下的含有数字 $1,2,\cdots,k$ 各一个的 k 位数组成的集合为 X_k. 求证：可以将 X_k 划分为两个互不相交的子集，使得这两个子集中所有元素的立方和相等.

证明见申强老师的文章《申强解一道德国数学奥林匹克题目》、《德国数学奥林匹克题目的后续思考》

1. 已知 $\triangle OFT\sim\triangle NOT$，且为同向相似，四边形 $FANP$ 为平行四边形. 求证：$OF\cdot ON=OA\cdot OT$.

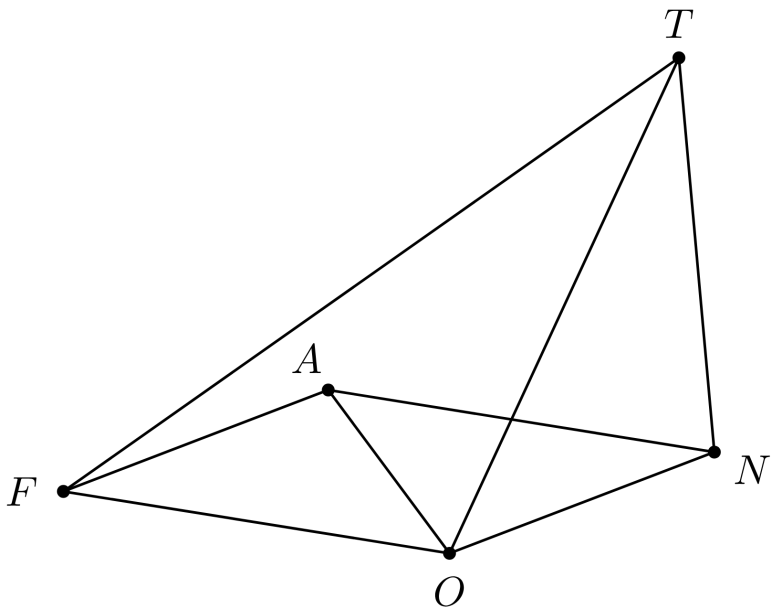
解答（PDF 中已展开）

证明由题意知 $\dfrac{OT}{TN}=\dfrac{OF}{ON}=\dfrac{OF}{FA}$.

又

$$\begin{aligned}\angle AFO=&180^\circ-\angle FON\\=&180^\circ-\angle FOT-\angle TON\\=&180^\circ-\angle ONT-\angle TON\\=&\angle NTO\end{aligned}$$

于是 $\triangle AFO\sim\triangle NTO$，故 $\dfrac{OA}{ON}=\dfrac{OF}{OT}$，即 $OF\cdot ON=OA\cdot OT$.



1.

(1) 求最大的实数 A，使得对任意非负实数 x，y，z，都有 $\dfrac{1+yz}{1+x^2}+\dfrac{1+zx}{1+y^2}+\dfrac{1+xy}{1+z^2}\geq A$.

(2) 对第一问所求的实数 A，求所有使得等号成立的三元非负实数组 (x,y,z).

解答（PDF 中已展开）

解

(1) 令 $x=y=0$，$z\to+\infty$，有 $A\leq 2$.

又不妨设 $x\geq y\geq z$，则

$$\sum\frac{1+xy}{1+z^2}>\frac{1+y^2}{1+z^2}+\frac{1+z^2}{1+y^2}\geq 2$$

故 $A_{max}=2$.

(2) 由 (1) 知，不存在使得等号成立的三元非负实数组 (x,y,z).

注：第一问中的不等式，我的证法是暴力展开，但过程比较繁杂（如下），这里采用了龚固老师的证法，非常简单.

$$\begin{aligned}
&\frac{1+yz}{1+x^2}+\frac{1+zx}{1+y^2}+\frac{1+xy}{1+z^2}>2\\
\iff&\sum_{cyc}(1+yz)(1+y^2)(1+z^2)>2(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)\\
\iff&\sum_{cyc}(1+y^2+z^2+yz+y^3z+yz^3+y^2z^2+y^3z^3)>2(1+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2)\\
\iff&1+\sum_{cyc}yz+\sum_{sym}y^3z+\sum_{cyc}y^3z^3>\sum_{cyc}y^2z^2+2x^2y^2z^2\\
\iff&1+\sum_{cyc}yz+\sum_{cyc}yz(y-z)^2+\left(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3-3x^2y^2z^2\right)>0
\end{aligned}$$

显然成立.

1. 是否存在无穷多个三元实数组 (u,v,w)，使得 u，v，w 组成等差数列，且 $uv+1$，$vw+1$ 和 $wu+1$ 均为完全平方数.

解答（PDF 中已展开）

解由 u，v，w 成等差数列，可令 $u=2s-t$，$v=2s$，$w=2s+t$. 于是有

$$\begin{cases}
A^2=4s^2-2st+1=(s-t)^2+3s^2-t^2+1\\
B^2=4s^2+2st+1=(s+t)^2+3s^2+t^2+1\\
C^2=4s^2-t^2+1=s^2+3s^2-t^2+1
\end{cases}$$

令 $3s^2-t^2+1=0$，则 $uv+1$，$vw+1$ 和 $wu+1$ 均为完全平方数.

这是一个佩尔方程，其有无数组整数解 (s,t)，于是相应的 $(u,v,w)=(2s-t,2s,2s+t)$ 也有无数组.

注：本题来源为《Modern Olympiad Number Theory》例 9.4.7，此解答只做了字母上的改变.

以下为图片版：

2021 年德国数学奥林匹克解答

1. 求所有实数 a、b、c、d，使得 a、b 为 $2x^2-3cx+8d$ 的两个互异根，且 c、d 为 $2x^2-3ax+8b$ 的两个互异根.

解 由韦达定理知：$a+b=\dfrac{3c}{2}$，$ab=4d$，$c+d=\dfrac{3a}{2}$，$cd=4b$.

由 $ab=4d$ 和 $cd=4b$ 知 $abcd=16bd$. 于是 $bd=0$，或 $ac=16$.

若 $bd=0$，则 $b=d=0$，此时有 $a=\dfrac{3c}{2}$，$c=\dfrac{3a}{2}$，于是 $a=c=0$，矛盾！于是 $ac=16$.

于是 $a+b=\dfrac{3c}{2}=\dfrac{3\cdot\frac{16}{a}}{2}$，即 $a^2+ab=24$；$\dfrac{3a}{2}=c+d=\dfrac{16}{a}+\dfrac{ab}{4}$，即 $6a^2=64+a^2b$.

因此 $6a^2=64+a\cdot(24-a^2)$ 即 $a^3+6a^2-24a-64=0$，也即 $(a+8)(a+2)(a-4)=0$.

故满足题意的 (a,b,c,d) 为 $(-8,5,-2,10)$ 或 $(-2,-10,-8,-5)$ 或 $(4,2,4,2)$.

2. 凸四边形 $ABCD$ 中，P，Q，R，S 分别在边 AB，BC，CD，DA 上. 求证：以下两个命题等价：

- 存在四边形 $PQRS$，P，Q，R，S 分别在线段 AB，BC，CD，DA 上，且不为顶点，使得周长最小.
- A，B，C，D 四点共圆，且圆心在四边形内部.

证明 见万宏老师的文章《【解题笔记】2021 德国数学奥林匹克 T2》

3. 对给定的正整数 $k\in[4,9]$，设所有十进制下的含有数字 $1,2,\cdots,k$ 各一个的 k 位数组成的集合为 X_k. 求证：可以将 X_k 划分为两个互不相交的子集，使得这两个子集中所有元素的立方和相等.

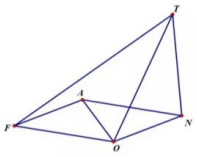
证明 见申强老师的文章《申强解一道德国数学奥林匹克题目》、《德国数学奥林匹克题目的后续思考》

4. 已知 $\triangle OFT\sim\triangle NOT$，且为同向相似，四边形 $FANP$ 为平行四边形. 求证：$OF\cdot ON=OA\cdot OT$.

证明 由题意知 $\dfrac{OT}{TN}=\dfrac{OF}{ON}=\dfrac{OF}{FA}$.

又 $\angle AFO=180^\circ-\angle FON=180^\circ-\angle FOT-\angle TON=180^\circ-\angle ONT-\angle TON=\angle NTO$.

于是 $\triangle AFO\sim\triangle NTO$，故 $\dfrac{OA}{ON}=\dfrac{OF}{OT}$，即 $OF\cdot ON=OA\cdot OT$.



恩次方根

5. (1) 求最大的实数 A，使得对任意非负实数 x，y，z，都有 $\dfrac{1+yz}{1+x^2}+\dfrac{1+zx}{1+y^2}+\dfrac{1+xy}{1+z^2}\geq A$.

(2) 对第一问所求的实数 A，求所有使得等号成立的三元非负实数组 (x,y,z).

解 (1) 令 $x=y=0$，$z\to+\infty$，有 $A\leq 2$.

又不妨设 $x\geq y\geq z$，则 $\sum\dfrac{1+xy}{1+z^2}>\dfrac{1+y^2}{1+z^2}+\dfrac{1+z^2}{1+y^2}\geq 2$，故 $A_{max}=2$.

(2) 由 (1) 知，不存在使得等号成立的三元非负实数组 (x,y,z).

注：第一问中的不等式，我的证法是暴力展开，但过程比较繁杂（如下），这里采用了龚固老师的证法，非常简单.

证明

$$\begin{aligned}
&\frac{1+yz}{1+x^2}+\frac{1+zx}{1+y^2}+\frac{1+xy}{1+z^2}>2\\
\Longleftrightarrow&\sum_{cyc}(1+yz)(1+y^2)(1+z^2)>2(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)\\
\Longleftrightarrow&\sum_{cyc}(1+y^2+z^2+yz+y^3z+yz^3+y^2z^2+y^3z^3)>2(1+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2)\\
\Longleftrightarrow&1+\sum_{cyc}yz+\sum_{sym}y^3z+\sum_{cyc}y^3z^3>\sum_{cyc}y^2z^2+2x^2y^2z^2\\
\Longleftrightarrow&1+\sum_{cyc}yz+\sum_{cyc}yz(y-z)^2+\left(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3-3x^2y^2z^2\right)>0
\end{aligned}$$

显然成立.

6. 是否存在无穷多个三元实数组 (u,v,w)，使得 u，v，w 组成等差数列，且 $uv+1$，$vw+1$ 和 $wu+1$ 均为完全平方数.

解 由 u，v，w 成等差数列，可令 $u=2s-t$，$v=2s$，$w=2s+t$. 于是有

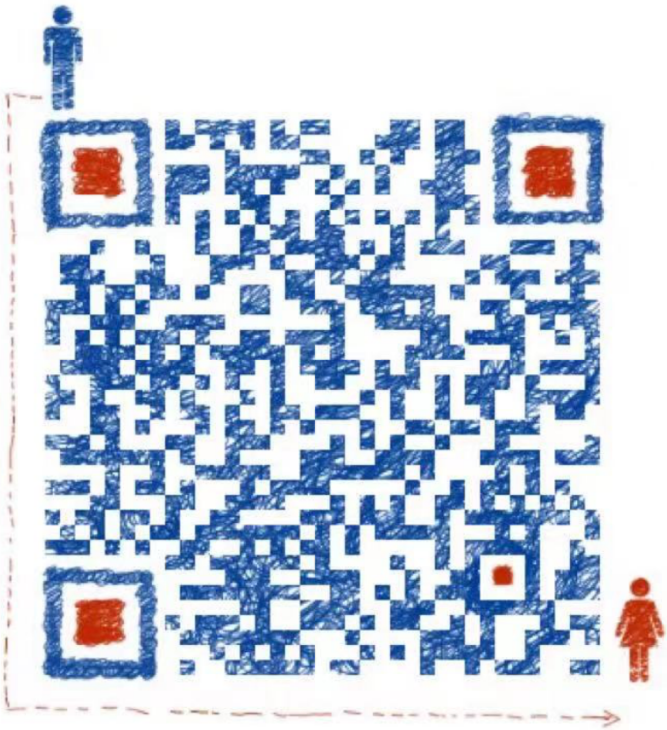
$$\begin{cases}A^2=4s^2-2st+1=(s-t)^2+3s^2-t^2+1\\B^2=4s^2+2st+1=(s+t)^2+3s^2+t^2+1\\C^2=4s^2-t^2+1=s^2+3s^2-t^2+1\end{cases}$$

令 $3s^2-t^2+1=0$，则 $uv+1$，$vw+1$ 和 $wu+1$ 均为完全平方数.

这是一个佩尔方程，其有无数组整数解 (s,t)，于是相应的 $(u,v,w)=(2s-t,2s,2s+t)$ 也有无数组.

注：本题来源为《Modern Olympiad Number Theory》例 9.4.7，此解答只做了字母上的改变.

恩次方根



恩次方根