# 中科大创新科学营第一阶段数学历年真题

2026-03-20　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3c12ae1c8c6dab3d

考试时间为 100 分钟，每题 20 分，满分 100 分。每年考试的题目风格比较接近，入围的同学可以在考前做做下面的真题。

其中 24、25 两年为创新科学营，22、23 两年为改革前的考试方案（即初试），但题目风格一致，所以也一并放上来了。

主要考察模块为：函数、数列、复数、概率、数论。

恩次方根
ENCIFANGGEN

## 2022 年中科大少年班初试数学试题

**1.** 求满足 $a+b+c=2022$，且 $abc$ 可被 2022 整除的正整数集合 $\{a,b,c\}$ 的个数.

**2.** 求满足如下条件的所有函数 $f(x)$:

(1) 定义域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$;

(2) $f(0)=0$;

(3) $\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin f\left(\frac{x}{3}\right)=x$ 恒成立.

**3.** 欧拉有著名公式 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$. 求最小的正整数 $n$，使得 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}>\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2022}$.

**4.** 在圆周上独立地随机选取 $n$ 个点，求这 $n$ 个点可以被半圆周覆盖的概率.

**5.** 设 $f_n(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-x)^n}{n!}$，$n\in\mathbb{N}_+$，$x\in\mathbb{R}$.

(1) 证明：方程 $f_{2n-1}(x)=0$ 有唯一实数解，记作 $a_n$;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 是否为单调数列？请证明你的结论.

1

恩次方根
ENCIFANGGEN

# 2023 年中科大少年班初试数学试题

**1.** 复数 $z$ 满足 $z^{2023}-z-1=0$，求证：$|z|\leq 1$ 当且仅当 $\Re(z)\leq -\dfrac{1}{2}$.

**2.** 设 $\overrightarrow{\alpha_i}$ $(1\leq i\leq 5)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的五个非零向量. 求证：存在非零向量 $\overrightarrow{\beta}\in\mathbb{R}^3$，使得存在 $1\leq j_1<j_2<j_3<j_4\leq 5$，满足 $\overrightarrow{\beta}$ 与 $\overrightarrow{\alpha_{j_k}}$ 的夹角均不超过 $\dfrac{\pi}{2}$ $(k=1,2,3,4)$.

**3.** 甲、乙两盒中各放 2 只兔子，一雌一雄. 称一次操作是从甲、乙盒中各随机抽一支兔子交换，记 $n$ 次操作后甲、乙盒中仍各有一雌一雄的概率为 $p_n$. 求 $p_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n$.

**4.** (1) $x>0$，证明：$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$.

(2) $0<a_1<\sqrt{3}$，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{\sin a_n}{n+1}$. 证明：对任意正整数 $n$，都有 $na_n<\dfrac{3a_1}{3-a_1^2}$.

**5.** 将正整数去除完全平方数后由小到大排成一排，记作 $a_1,a_2,\cdots$. 比如 $a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=5$，$\cdots$. 求证：对任意正整数 $n$，都有 $|a_n-n-\sqrt{n}|<\dfrac{1}{2}$.

恩次方根
ENCIFANGGEN

## 2024 年中科大创新科学营第一阶段数学试题

**1.** 从 $\{1,2,\cdots,9\}$ 中选取三个不同的数，从大到小拼成一个三位数 $X$，再从 $\{1,2,\cdots,8\}$ 中选取三个不同的数，从大到小拼成一个三位数 $Y$．求 $X>Y$ 的概率．

**2.** 设 $x\geq -1$ 且 $x\in\mathbb{R}$，令 $a_1=\sqrt{2x+3}$，对任意 $n\in\mathbb{N}_+$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$．试求使数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个正整数的 $x$ 的全部取值．

**3.** 求所有实数 $a$，使得对任意 $x\in\mathbb{R}$，都有

$$|x^2+ax+2|\geq|x+1|.$$

**4.** 求所有 2024 次实系数多项式 $f(x)$，使得对任意 $x\in\mathbb{R}$，都有

$$f(x^2)=f(x)\cdot f(x+2).$$

**5.** 给定整数 $n\geq 2024$，复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 满足 $|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_n|=1$，且 $z_1+z_2+\cdots+z_n=n-2+\mathrm{i}$．求 $\mathrm{Re}(z_1)$ 的最小值．

恩次方根
ENCIFANGGEN

## 2025 年中科大创新科学营第一阶段数学试题

**1.** 已知 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 和 $xy=t$ 有四个交点.

(1) 求 $t$ 的范围.

(2) 求四个交点围成的四边形的面积 $S(t)$.

**2.** 已知 $x^4+x^3-7x-a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一根，求 $a$ 的范围.

**3.** 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0,a_1>0$，对任意 $n\in\mathbb{N}_+$，$a_{2n}=\frac{1+a_{2n-1}}{a_{2n-2}}$，$a_{2n+1}=\frac{1+a_{2n}^2}{a_{2n-1}}$. 求证：$\{a_n\}$ 为周期数列.

**4.** 函数 $f:\mathbb{N}_+\to\mathbb{N}$ 定义如下：对任意 $x\in\mathbb{N}_+$，$f(x)=k$，其中 $k$ 为满足 $3^k\mid x$ 的最大正整数. 求证：

$$f(4^n-1)=f(n)+1.$$

**5.** 将编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 $n$ 个球逐个放入编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 $n$ 个箱子中. 首先，1 号球随机放入 1 号以外的任一个箱子；对 $k$ 号球，若 $k$ 号箱子为空，则放入 $k$ 号箱子，否则随机放入一个空箱. 求 $n$ 号球放入 $n$ 号箱子中的概率.