2021 年墨西哥数学奥林匹克

2021-11-20　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3c8a809e5adb05ca

1. 正实数 a_1，a_2，a_3 为等差数列的连续三项．相异正实数 b_1，b_2，b_3 也为等差数列的连续三项．能否分别以 a_1，a_2，a_3 为长，b_1，b_2，b_3 为宽，构成三个面积相等的矩形?

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB > 90^\circ$，D 为 BC 上一点，满足 $AD \perp BC$．Γ 是以 BC 为直径的圆，过 D 的直线 ℓ 与 Γ 切于点 P，交线段 AC 于点 M，交线段 AB 于 N．求证：M 为 DP 中点当且仅当 N 为 AB 中点.

3. 在一块 $m \times n$ 的棋盘中，左下角的小方格处有一只蚂蚁．这只蚂蚁需要到达右上角的小方格，每一次它只能走到自己右方、右上方、上方三个方格之一．然而棋盘中的一些小方格被熔岩所阻挡．已知：

- 蚂蚁能够完成到达右上角小方格的目标；
- 如果某个小方格被熔岩所阻挡，那么在其所在列上方的所有小方格也都被熔岩所阻挡．记 P 为蚂蚁经过偶数次到达右上角的路线数，I 为蚂蚁经过奇数次到达右上角的路线数．求 $P - I$ 的所有可能值.

1. 设 $\triangle ABC$ 为锐角不等边三角形，且 $\angle BAC = 60^\circ$，垂心为 H．圆 ω_b 过点 H 且和 AB 切于点 B，圆 ω_c 过点 H 且和 AC 切于点 C.

- 求证：ω_b 和 ω_c 恰有 H 一个公共点.
- 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，求证：OH 为 ω_b 和 ω_c 的公切线.

1. 设 $n = \overline{a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k}$，定义 $s(n)$ 如下：

- 若 k 为偶数，则 $s(n) = \overline{a_1 a_2} + \overline{a_3 a_4} \cdots + \overline{a_{k-1} a_k}$；
- 若 k 为奇数，则 $s(n) = a_1 + \overline{a_2 a_3} \cdots + \overline{a_{k-1} a_k}$．例如 $s(123) = 1 + 23 = 24$，$s(2021) = 20 + 21 = 41$.
  称 n 为 “算术的”，如果 $s(n)$ 为 n 的约数．求证：在任意小于 2000021 的连续 198 个正整数中，必有一个数是 “算术的”.

1. 求所有的非空集合 C_1，C_2，C_3，$\cdots$，其中每个均为由正整数组成的有限集，并且满足如下性质：对任意正整数 n 和 m，集合 C_n 中的元素个数加上集合 C_m 中的元素个数等于集合 C_{n+m} 中元素的总和.
   注：记 $|C_n|$ 为集合 C_n 中的元素个数，S_n 为集合 C_n 中所有元素之和．则问题可以描述为：对任意正整数 n 和 m，都有 $|C_n| + |C_m| = Sn + m$.



程国根

江西 上饶

扫一扫上面的二维码图案，加我微信

恩次方根