从碰撞动能损失到方差：柯尼希定理的数学本质

2026-05-09　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3cc45e6c44a65625

柯尼希定理是碰撞问题的核心结论，其本质是代数平方和分解的具象化，与统计学方差、拉格朗日恒等式存在深刻的联系．本文从柯西不等式出发，严格推导这一统一数学结构.

一、柯西不等式与拉格朗日恒等式

对任意实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$，**拉格朗日恒等式**给出柯西不等式的精确等式形式：

$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n}(a_i b_j - a_j b_i)^2$

当 $b_i = 1$ 时，恒等式简化为：

$n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n}(a_i - a_j)^2$

右边是所有两两差值的平方和，左边正是 n 倍的样本方差 $\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2$．这表明方差不仅是数据与均值的偏离程度，也是数据内部两两差异的总和.

二、柯尼希定理的严格推导

考虑 n 个质点组成的系统，质量 $m_1, m_2, \ldots, m_n$，速度 $v_1, v_2, \ldots, v_n$．定义：

- 总质量 $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$
- 质心速度 $v_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i$

将速度分解为质心速度与质心系相对速度：

$v_i = v_c + u_i$

由质心定义，质心系总动量恒为零：

$\sum_{i=1}^{n} m_i u_i = 0$

系统总动能：

$$
\begin{aligned}
E_k &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (v_c + u_i)^2 \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i u_i^2}
\end{aligned}
$$

这就是**柯尼希定理**：质点系总动能等于质心平动动能与质心系相对动能之和.

碰撞过程中系统总动量守恒，质心速度 v_c 不变，动能损失仅来自相对动能的减少：

$\Delta E_k = E_{k,\text{相对初}} - E_{k,\text{相对末}} \geq 0$

完全非弹性碰撞时，所有质点共速 $v_i = v_c$，相对动能为零，动能损失最大：

$\Delta E_{k,\max} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i u_i^2$

三、动能损失与方差的联系

3.1 等质量情形：算术方差

令 $m_i = m$，则质心速度退化为速度算术平均值：

$v_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i = \bar{v}$

柯尼希定理变为：

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = n\bar{v}^2 + \sum_{i=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2}$$

右边第二项为 n 倍速度样本方差 nS_v^2，代入最大动能损失公式：

$\Delta E_{k,\max} = \frac{1}{2}mnS_v^2$

结论 1：等质量质点系最大动能损失与速度样本方差成正比．方差越大，速度分布越分散，动能损失越多；方差为零时无动能损失.

3.2 一般质量情形：加权方差

引入权重 $w_i = \frac{m_i}{M}$（满足 $\sum w_i = 1$），则质心速度为速度加权平均值：

$v_c = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i = \bar{v}_w$

加权方差定义为：

$S_{v,w}^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i (v_i - \bar{v}_w)^2$

最大动能损失可表示为：

$\Delta E_{k,\max} = \frac{1}{2}MS_{v,w}^2$

结论 2：一般质点系最大动能损失与速度加权方差成正比，比例系数为总质量的一半.

3.3 完全非弹性碰撞数值例子

质量 $m_1 = 2$ kg、速度 $v_1 = 5$ m/s 的物体与静止的 $m_2 = 3$ kg 物体发生完全非弹性碰撞.

解法 1（传统方法）：由动量守恒得 $v_c = 2$ m/s，碰撞前动能 25 J，碰撞后动能 10 J，动能损失 15 J.

解法 2（方差方法）：加权方差 $S_{v,w}^2 = \frac{2}{5}(5-2)^2 + \frac{3}{5}(0-2)^2 = 6\ \text{m}^2/\text{s}^2$，最大动能损失 $\Delta E_{k,\max} = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$ J.

两种方法结果一致，验证了等价性.

3.4 平方和的正交分解本质

在带权内积空间 $\mathbb{R}^n$ 中，定义内积 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$，则速度向量可正交分解为：

$\boldsymbol{v} = v_c \mathbf{1} + \boldsymbol{u}$

其中 $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ 为全 1 向量，$\boldsymbol{u}$ 为相对速度向量，且 $\langle \boldsymbol{u}, \mathbf{1} \rangle = 0$. 由勾股定理：

$\|\boldsymbol{v}\|^2 = \|v_c \mathbf{1}\|^2 + \|\boldsymbol{u}\|^2$

这正是柯尼希定理的向量形式.

3.5 与拉格朗日恒等式的直接关联

将拉格朗日恒等式推广到带权情形：

$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i v_i\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_i m_j (v_i - v_j)^2$

左边为 $M \sum m_i u_i^2$，右边为所有质点两两相对动能的总和. 因此，质心系相对动能可表示为：

$E_{k,\text{相对}} = \frac{1}{4M} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_i m_j (v_i - v_j)^2$

这表明**相对动能本质上是系统内部所有两两质点相对动能的平均值**. 最大动能损失也可直接通过两两速度差计算：

$\Delta E_{k,\max} = \frac{1}{4M} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_i m_j (v_i - v_j)^2$

总结

柯尼希定理、方差与拉格朗日恒等式有相同的数学本质：平方和的正交分解.

- 拉格朗日恒等式是平方和分解的最一般形式
- 方差是拉格朗日恒等式在等权情形下的特例
- 柯尼希定理是拉格朗日恒等式在质点系动能中的物理应用

这种跨学科联系揭示了物理规律与数学定理的深层统一性.

写在最后

本文由 AI 辅助生成，输入如下：

帮我写一篇公众号文章，主题为物理中碰撞动能损失（柯尼希定理相关）在数学中的应用，主要为以下几个部分：

1. 用 Cauchy 不等式、Lagrange 恒等式引入
2. 用物理方法严格推导柯尼希定理，并给出在碰撞过程中动能损失应用
3. 介绍动能损失和方差的联系，适当加上例子

要求：侧重数学方面的严格推导，以及这三者的联系，行文风格参考给你的图片，语言精炼，只讲重点，不要任何废话