一分钟做不等式系列（11）——2025 年巴西数学奥林匹克

2025-10-23　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3d36eaabd8b92329

32 (2025 年巴西数学奥林匹克). 证明：存在正整数 n 以及 $2n$ 个非负实数 $0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ 和 $0 \le b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$，满足以下条件：

(1) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge 2025^{2025}$；

(2) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \ge 2025^{2025}$；

(3) $c_1 + c_2 + \cdots + c_n \le \dfrac{1}{2025^{2025}}$，其中 $c_i = \min(a_i, b_i)$，$i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

并求出满足题意的 n 的最小值.

解 为方便起见，记 $t = 2025^{2025}$.

不妨设 $a_n \le b_n$，于是 $\dfrac{1}{t} \ge \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \ge c_n = a_n \ge \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \ge \dfrac{t}{n}$，即 $n \ge t^2$.

取 $a_1 = \cdots = a_{t^2} = \dfrac{1}{t}$，$b_1 = \cdots = b_{t^2-1} = 0$，$b_{t^2} = t$ 知 $n = t^2$ 满足条件.

综上，n 的最小值为 t^2.

题目来源：2025 巴西数学奥林匹克中文翻译

今天的题目确实非常水，就不多说了（能放进解答比题目短系列了）。

后台有读者说这个系列好久没有更新了，主要是我只想放一些新的比赛题，欢迎大家多多投稿难度适合的新题目。