用复数法解一道四边形边长问题

2024-04-07　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3d7d0c1b8c560b94

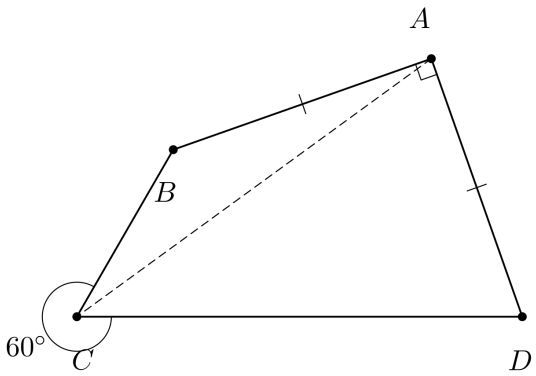
看到金磊大师今天发的文章：用全等及勾股定理解一道较难的四边形边长问题

金老师讲得深入浅出，让人眼前一亮。

不过我看到题目的第一想法是：用复数法很好算（解析法也很快）。

题目如下：

> 已知：凸四边形 $ABCD$ 中，$BC=2\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{62}$，$\angle BAD=90^\circ$，$\angle BCD=60^\circ$，$AB=AD$．求 CD.



解答（PDF 中已展开）

解答：

以 C 为原点建立复平面，使 D 在实轴正半轴上．用大写字母表示每个点对应的复数.

由 $\angle BCD=60^\circ$，$BC=2\sqrt{3}$ 知：

$$B=\sqrt{3}+3\mathrm{i}$$

由 $AB=AD$，$\angle BAD=90^\circ$ 知：

$$D-A=\mathrm{i}(B-A)$$
$$\Rightarrow A=\frac{D-\mathrm{i}B}{1-\mathrm{i}}=\frac{D+3-\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$

于是

$$|A|^2=\frac{(D+3)^2+3}{2}=62$$

结合 $D\in\mathbb{R}_+$ 知：$D=8$，即 CD 的长度为 8.