9-8 恒等式与不等式

2021-04-13 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3e9122602625b0dc

在一道三角不等式的若干解法一文中，我们用到了

$$\begin{aligned}&(x+y+z)(xy+yz+zx)\\=&(x+y)(y+z)(z+x)+xyz\end{aligned}$$

这一恒等式，在某些地方，这个恒等式被称之为“9-8 恒等式”（两个乘积式展开后各有九项和八项）．其揭示了 $x+y+z$，$xy+yz+zx$，xyz 这三个关于 x，y，z 的三元对称式的基本对称式与 $\prod\limits_{cyc}(x+y)$ 之间的联系．

此外，结合均值不等式，我们可以得到

$$\begin{aligned}&9(x+y)(y+z)(z+x)\\=&9(x+y+z)(xy+yz+zx)-9xyz\\\geq&8(x+y+z)(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

这就是“9-8 不等式”．

注事实上，2016 年初中数学联赛二试第三题第 2 问就是“9-8 不等式”的证明．

“9-8 恒等式”与“9-8 不等式”在三元对称不等式中往往应用非常广泛，下面举几个例子进行说明．

例 1 a，b，c 为正数，求证：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{16(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}>8$$

证明先假定 a，b，c 为非负实数（至多一个为 0）．则

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\\=&\frac{\sum a(a+b)(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\=&\frac{\sum(a^3+a^2b+a^2c+abc)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\\geq&\frac{\sum(a^3+a^2b+a^2c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\=&\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\\=&\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}\\=&\frac{(a+b)(b+c)(c+a)+abc}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}\\\geq&\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}\end{aligned}$$

由均值不等式，并注意到 $abc\neq 0$ 即证.

例 2 设 a，b，c 为正实数，证明：

$$\sum_{cyc}\frac{1}{(a+2b+c)^2}\leq\frac{9}{16(ab+bc+ca)}$$

证明由均值不等式：

$$\begin{aligned}&\sum_{cyc}\frac{1}{(a+2b+c)^2}\\=&\sum_{cyc}\frac{1}{[(a+b)+(b+c)]^2}\\\leq&\sum_{cyc}\frac{1}{4(a+b)(b+c)}\\=&\frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\end{aligned}$$

由 “9-8 不等式”：

$$\frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq\frac{9}{8(ab+bc+ca)}$$

代入原不等式即证.

例 3 正实数 a，b，c 满足 $abc=1$. 求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{a+b+c}\geq 4$$

证明将待证不等式两边同时乘以 2 可变为：

$$\frac{x+y}{xy}+\frac{y+z}{yz}+\frac{z+x}{zx}+\frac{6}{x+y+z}\geq 8$$

由均值不等式：

$$\begin{aligned}&\frac{x+y}{xy}+\frac{y+z}{yz}+\frac{z+x}{zx}+\frac{6}{x+y+z}\\ \geq&4\sqrt[4]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x^2y^2z^2(x+y+z)}}\\ =&4\sqrt[4]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z}}\end{aligned}$$

故只需证明:

$$4\sqrt[4]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z}}\geq 8$$

即

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq\frac{8}{3}(x+y+z)$$

由 “9-8 不等式”:

$$\begin{aligned}&(x+y)(y+z)(z+x)\\ \geq&\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)\\ \geq&\frac{8}{9}(x+y+z)\cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\\ =&\frac{8}{3}(x+y+z)\end{aligned}$$

证毕.