2021 年基辅数学节

2021-05-14 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3ecebbfddd49aec9

八年级组

1. 求方程

$$(3a-bc)(3b-ac)(3c-ab)=1000$$

的整数解.

2. 在一个方形网格的 11 个单元格中，各有一只刺猬. 每只刺猬都将其所在行内的刺猬个数除以其所在列内的刺猬个数. 问：每只刺猬是否能得到不同的数字?

3. 设 ω 为 $\triangle ABC$（$AB>AC$）的外接圆，E 为弧 AC（不含点 B）的中点，F 为弧 AB（不含点 C）的中点. AF 和 BE 交于点 P，CF 和 AE 交于点 R，ω 在 A 处的切线和 BC 交于点 Q. 求证：P，Q，R 三点共线.

4. 求所有由 63 个整数构成的可重集合，使得其中每一个数的平方等于其余所有数之和，且其中的数不全相等.

5. Bilbo 用如下方式构造了一个由 0 和 1 组成的数字三角形：首先将任意 n 个数（0 或 1）写在最上面一行，在其它行中，在连续两个相同数字的下方写数字 0，在连续两个不同数字的下方写数字 1.（下图为 $n=5$ 的三角形示例.）$n=100$ 时，Bilbo 有多少种方法写第一行的数，使得此三角形的每一行均含有偶数个 1?

1 0 1 1 0
1 1 0 1
0 1 1
1 0
1

九年级组

1. 平面上是否存在四个点，使得每一点与其它三点之间的距离成等差数列?

2. 在一个方形网格的若干个单元格中，各有一只刺猬. 每只刺猬都将其所在行内的刺猬个数乘以其所在列内的刺猬个数. 问：每只刺猬是否能得到不同的数字?

3. 在 $\triangle ABC$ 中，AD 为高，AE 为中线，O 为外心. 点 X 和点 Y 在 $\triangle ABC$ 内部，且满足 $\angle BAX=\angle CAY$，$OX\perp AX$，$OY\perp AY$. 求证：D，E，X，Y 四点共圆.

4. 同八年级组第 4 题.

5. Frodo 用如下方式构造了一个由 0 和 1 组成的数字三角形：首先将任意 n 个数（0 或 1）写在最上面一行，在其它行中，在连续两个相同数字的下方写数字 0，在连续两个不同数字的下方写数字 1.（下图为 $n=5$ 的三角形示例.）$n=100$ 时，Bilbo 有多少种方法写第一行的数，使得此三角形的每一行均含有奇数个 1?

1 0 1 1 0
1 1 0 1
0 1 1
1 0
1

十年级组

1. 同九年级组第 1 题.

2. 设 $a,b,c\geq 0$，且 $a+b+c=3$. 求证：

$$(3a-bc)(3b-ac)(3c-ab)\leq 8.$$

3. 是否对于任意的 $n\geq 2021$，均存在 n 个整数，使得其中每一个数的平方等于其余所有数之和，且其中的数不全相等.

4. 同九年级组第 5 题.

5. 设 ω 为 $\triangle ABC$（$AB\neq AC$）的外接圆，I 为内心. P 为 ω 上一点使得 $\angle API=90^\circ$，S 为 AP 和 BC 的交点，W 为 AI 和 ω 的另一个交点. 过 W 作 AW 的垂线与 AP 交于点 D，与 BC 交于点 E. 求证：$SD=IE$.