2024 年 BxMO 第 4 题分析——一道由 abc 猜想而来的数论题

2024-05-03　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_3ef2a0016bed9d49

2024 年 BxMO 第 4 题如下：

对每个正整数 n，记 $\mathrm{rad}(n)$ 为 n 的所有不同素因子之积. 求证：存在整数 $a,b>1$，满足 $\gcd(a,b)=1$，且

$$\mathrm{rad}(ab(a+b))<\frac{a+b}{2024^{2024}}.$$

题目背景：

1. $\mathrm{rad}(n)$ 的含义

这里的 $\mathrm{rad}(n)$ 叫做正整数 n 的**根数**（radical），下面举几个例子：

$$\mathrm{rad}(16)=\mathrm{rad}(2)=2$$

$$\mathrm{rad}(17)=17$$

$$\mathrm{rad}(18)=\mathrm{rad}(2\times 3)=6$$

特别地，定义 1 的根数 $\mathrm{rad}(1)=1$.

1. abc 猜想

设正整数 a,b,c 满足 $a+b=c$，且 $\gcd(a,b)=1$，考察 $\mathrm{rad}(abc)$ 和 c 的大小关系.

可以发现，在大多数情况下，$c<\mathrm{rad}(abc)$，但也有无数组 (a,b,c)，使得 $c>\mathrm{rad}(abc)$. 例如：

$$a=1,b=2^{6n}-1,c=2^{6n}$$

更一般地，对于

$$a=1,b=2^{p(p-1)n}-1,c=2^{p(p-1)n}$$

有 $\mathrm{rad}(abc)<\frac{2}{p}c$，其中 p 为大于 2 的素数.

由欧拉定理显然，读者可以自行验证.（这一过程很重要，后面还会用到）

abc 猜想的标准形式如下：

设正整数 a,b,c 满足 $a+b=c$，且 $\gcd(a,b)=1$，则 $\forall\varepsilon>0$，仅存在有限组 (a,b,c)，使得

$$(\mathrm{rad}(abc))^{1+\varepsilon}<c.$$

abc 猜想在 1985 年被 Joseph Oesterlé 和 David Masser 提出，2012 年时，日本数学家望月新一宣称证明了此猜想，但迄今为止，尚未证实整个证明是准确无误的。

1. 本题与 abc 猜想的关系

由 2 知，满足 $\mathrm{rad}(abc)<c$ 的 (a,b,c) 有无穷多组，但只给出了 $a=1$ 的构造.

本题进行了加强，要求

$$\mathrm{rad}(abc)<\frac{1}{2024^{2024}}c$$

且要求给出 $a,b>1$ 的一组构造.

分析：

对 $a+b=c$，要想 $\mathrm{rad}(abc)$ 尽可能小，我们希望 a,b,c 中都有尽可能多的相同素因子. 主要有下面两个思路：

1. 让 a,c 均为一个素数的幂.
2. 让 a,b,c 均为一个数的平方，考虑勾股方程的通解.

解答（PDF 中已展开）

解答 1:

模仿背景 2 中的构造，可取 $a=2^{p(p-1)}$，$c=3^{p(p-1)}$，则 $b=3^{p(p-1)}-2^{p(p-1)}$.

于是 $\mathrm{rad}(a)=2$，$\mathrm{rad}(c)=3$.

由欧拉定理：$\varphi(p^2)=p(p-1)$，于是

$$b\equiv 1-1=0 \pmod{p^2}$$

因此 $\mathrm{rad}(b)\le\dfrac{b}{p}$.

$$\begin{aligned}&\mathrm{rad}(abc)\\=&\mathrm{rad}(a)\mathrm{rad}(b)\mathrm{rad}(c)\\\leq&2\cdot\frac{b}{p}\cdot 3\\<&\frac{6}{p}\cdot c\end{aligned}$$

取足够大的素数 p，使得 $\dfrac{6}{p}\leq\dfrac{1}{2024^{2024}}$，即 $p\geq 6\times 2024^{2024}$ 即可.

解答 2:

考虑勾股方程的通解:

$$(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=(x^2+y^2)^2$$

简单起见，取 $y=1$，即

$$(x^2-1)^2+(2x)^2=(x^2+1)^2$$

为使 $b=(2x)^2$ 素因子尽可能相同，可取 $x=2^n$，即

$$(4^n-1)^2+4^{n+1}=(4^n+1)^2$$

取 $a=(4^n-1)^2$，$b=4^{n+1}$，$c=(4^n+1)^2$.

则 $\mathrm{rad}(abc)=2\mathrm{rad}(16^n-1)$. 现在希望

$$2\mathrm{rad}(16^n-1)<\frac{(4^n+1)^2}{2024^{2024}}.$$

两边量级相同，但右边分母太大，所以希望 16^n-1 能够再分解出一些相同的素因子.

考虑 LTE 引理:

> 设 $x,y\in\mathbb{Z}$，$n\in\mathbb{Z}_+$. 对任意奇素数 p，若 $p\mid x-y$，且 $p\nmid x$，$\nmid y$，有

$$v_p(x^n-y^n)=v_p(x-y)+v_p(n)$$

取一个奇素数 p，使得 $p\mid 16-1$，可取 $p=3$，于是有

$$v_3(16^n-1)=v_3(16-1)+v_3(n)=1+v_3(n)$$

为使 16^n-1 中有尽可能多的素因子 3，可考虑让 $n=3^k$，于是 $v_3(16^{3^k}-1)=k+1$，即 $3^{k+1}\mid 16^{3^k}-1$. 因此

$$2\mathrm{rad}(16^n-1)\le 2\cdot\frac{16^n-1}{3^k}<2\cdot\frac{(4^n+1)^2}{3^k}$$

取足够大的 k，使得 $\dfrac{2}{3^k}\le\dfrac{1}{2024^{2024}}$，即 $3^k\ge 2\cdot 2024^{2024}$ 即可.

后记：

本题还有很多的构造方法，但大同小异，读者可以自行尝试.

总体来说，这题背景深刻，但考察的内容只是数论中的基本知识，难度相对较低，是一道非常有趣的数论问题.