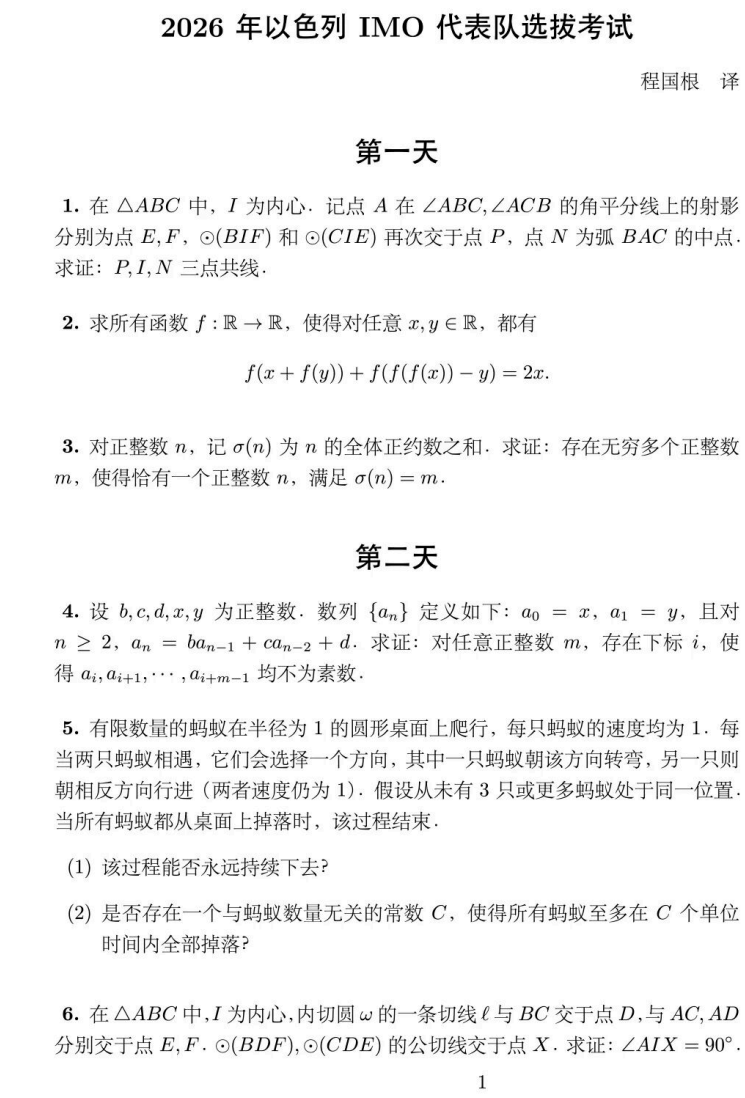
2026 年以色列 IMO 代表队选拔考试

2025-11-25　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_406a78efddc2c79f

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读；下方附本站人工转写的文字版，只作阅读与检索之用，若与原图有出入，以公众号原文为准。



2026 年以色列 IMO 代表队选拔考试

程国根　译

第一天

1. 在 $\triangle ABC$ 中，I 为内心．记点 A 在 $\angle ABC, \angle ACB$ 的角平分线上的射影分别为点 E, F，$\odot(BIF)$ 和 $\odot(CIE)$ 再次交于点 P，点 N 为弧 BAC 的中点．求证：P, I, N 三点共线．

2. 求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，都有

$$f(x + f(y)) + f(f(f(x)) - y) = 2x.$$

3. 对正整数 n，记 $\sigma(n)$ 为 n 的全体正约数之和．求证：存在无穷多个正整数 m，使得恰有一个正整数 n，满足 $\sigma(n) = m$．

第二天

4. 设 b, c, d, x, y 为正整数．数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_0 = x$，$a_1 = y$，且对 $n \geq 2$，$a_n = ba_{n-1} + ca_{n-2} + d$．求证：对任意正整数 m，存在下标 i，使得 $a_i, a_{i+1}, \cdots, a_{i+m-1}$ 均不为素数．

5. 有限数量的蚂蚁在半径为 1 的圆形桌面上爬行，每只蚂蚁的速度均为 1．每当两只蚂蚁相遇，它们会选择一个方向，其中一只蚂蚁朝该方向转弯，另一只则朝相反方向行进（两者速度仍为 1）．假设从未有 3 只或更多蚂蚁处于同一位置．当所有蚂蚁都从桌面上掉落时，该过程结束．

(1) 该过程能否永远持续下去？

(2) 是否存在一个与蚂蚁数量无关的常数 C，使得所有蚂蚁至多在 C 个单位时间内全部掉落？

6. 在 $\triangle ABC$ 中，I 为内心，内切圆 ω 的一条切线 ℓ 与 BC 交于点 D，与 AC, AD 分别交于点 E, F．$\odot(BDF), \odot(CDE)$ 的公切线交于点 X．求证：$\angle AIX = 90°$．

1

本站人工转写（文字版）

下面这段文字由本站对照上方图片逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏；它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1. 第一天第 1 题　在 $\triangle ABC$ 中，I 为内心。记点 A 在 $\angle ABC, \angle ACB$ 的角平分线上的射影分别为点 E, F，$\odot(BIF)$ 和 $\odot(CIE)$ 再次交于点 P，点 N 为弧 BAC 的中点。求证：P, I, N 三点共线。

2. 第一天第 2 题　求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $f(x+f(y))+f(f(x))-y)=2x$。
3. 第一天第 3 题　对正整数 n，记 $\sigma(n)$ 为 n 的全体正约数之和。求证：存在无穷多个正整数 m，使得恰有一个正整数 n，满足 $\sigma(n)=m$。
4. 第二天第 4 题　设 b,c,d,x,y 为正整数。数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_0=x$，$a_1=y$，且对 $n\ge 2$，$a_n=ba_{n-1}+ca_{n-2}+d$。求证：对任意正整数 m，存在下标 i，使得 $a_i,a_{i+1},\dots,a_{i+m-1}$ 均不为素数。
5. 第二天第 5 题　有限数量的蚂蚁在半径为 1 的圆形桌面上爬行，每只蚂蚁的速度均为 1。每当两只蚂蚁相遇，它们会选择一个方向，其中一只蚂蚁朝该方向转弯，另一只则朝相反方向行进（两者速度仍为 1）。假设从未有 3 只或更多蚂蚁处于同一位置。当所有蚂蚁都从桌面上掉落时，该过程结束。(1) 该过程能否永远持续下去？(2) 是否存在一个与蚂蚁数量无关的常数 C，使得所有蚂蚁至多在 C 个单位时间内全部掉落？
6. 第二天第 6 题　在 $\triangle ABC$ 中，I 为内心，内切圆 ω 的一条切线 ℓ 与 BC 交于点 D，与 AC,AD 分别交于点 E,F。$\odot(BDF)$、$\odot(CDE)$ 的公切线交于点 X。求证：$\angle AIX=90^\circ$。