2024 年第二届业余几何奥林匹克

2024-11-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_40e700133dd149df

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

这是 aops 上的一个模拟赛，全名为 Amateur Geometer's Olympiad.

2024 年第二届业余几何奥林匹克

程国根 译

第一天

1. 在梯形 $ABCD$ 中，$BC \parallel AD$，且 $BC > AD$. 若在线段 BC 上存在点 P，使得 $\triangle APB$,$\triangle APD$ 和 $\triangle DPC$ 的周长相等，求证：$BC = 2AD$.

2. 给定不等边三角形 ABC，点 D 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，且 D, A 在直线 BC 的同侧. 给定垂直于 BC 的直线 ℓ，设 $\angle BDC$ 的外角平分线和 ℓ 交于点 E. 求证：当点 D 运动时，$\triangle ADE$ 的外接圆过一个异于点 A 的定点.

3. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，点 D, E 分别在线段 AB, AC 上，满足 B, D, E, C 四点共圆. 求证：$\odot(BOD)$ 和 $\odot(COE)$ 相切当且仅当 DE 平分 AO.

第二天

4. 设 $\triangle ABC$ 为不等边三角形. 线段 BC 的中垂线与 AB, AC 分别交于点 A_b, A_c. 设点 O_a 为 $\triangle AA_bA_c$ 的外心，类似定义点 O_b, O_c. 求证: $\odot(O_aO_bO_c)$ 和 $\odot(ABC)$ 相切.

5. 不等边三角形 ABC 的外心为 O，内心为 I，内切圆为 ω，ω 和 BC 切于点 D. 直线 DO 和 AI 交于点 E，和 ω 再次交于点 J. 设 $\odot(EDI)$ 和 $\odot(EJA)$ 再次交于点 F（异于点 E），求证: EF, OI, BC 三线共点或平行.

6. Teakay 有一个作图工具，在给定平面上的点 P 和直线 ℓ 的情况下，能作出 P 关于 ℓ 的对称点 P'.
求证: 若已作出 $\triangle ABC$、过 $\triangle ABC$ 外心的直线 ℓ（外心没有作出）、以及 ℓ 上的两个不同点 P, Q，Teakay 就可以仅用这个工具、一把无刻度直尺、一支铅笔作出 P, Q 两点相对于 $\triangle ABC$ 的垂足圆的根轴.
注: 点 X 相对于 $\triangle ABC$ 的垂足圆是过 X 到 $\triangle ABC$ 三边的垂足的圆.