几个不等式的证明

2021-05-12　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4156de6ff2d7f424

题目 1（2021 年西班牙数学奥林匹克）实数 a，b，c，d 满足

$$a+b+c+d=0,$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2=12$$

求 $abcd$ 的最值以及取得最值时 a，b，c，d 的取值.

分析最大值很容易得到，让四个数的绝对值均相等即可．最小值一定为负，故在 a，b，c，d 三正一负或一正三负时取得，而这两种情形本质是一样的，于是不妨设为三正一负，将负数用三个正数表示，可变为一个常见的三元条件不等式.

解答（PDF 中已展开）

解答首先由 “几何-平方平均值不等式” 得：

$$\sqrt[4]{|abcd|}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}=\sqrt{3}$$

即

$$abcd\leq|abcd|\leq 9.$$

当且仅当

$$\begin{cases}a+b+c+d=0\\ a^2+b^2+c^2+d^2=12\\ |a|=|b|=|c|=|d|\end{cases}$$

即 a，b，c，d 为 $\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$ 的任意排列时，等号成立．故最大值为 9.

a，b，c，d 中有偶数个负数时，$abcd$ 的值为负数；有 0 时，$abcd$ 的值为 0；有三负一正时，将每一个数均改为其相反数，此时仍然满足题目条件，且 $abcd$ 的值不变．因此只需考虑三正一负的情形，不妨设 $a,b,c>0$，$d<0$.

于是

$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2=12$$

即

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=12$$

注意到

$$\begin{aligned}
&3|abcd|\\
=&3abc(a+b+c)\\
=&3bc(a^2+ab+ac)\\
\le&\left(\frac{3bc+a^2+ab+ac}{2}\right)^2\\
=&\left(\frac{2bc+(a+b)(a+c)}{2}\right)^2\\
\le&\left(\frac{\frac{(b+c)^2}{2}+\frac{(a+b)^2+(a+c)^2}{2}}{2}\right)^2\\
=&\left(\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}{4}\right)^2\\
=&9
\end{aligned}$$

即 $abcd\ge -3$.

当且仅当 a，b，c，d 为 1，1，1，-3 或 -1，-1，-1，3 的任意排列时，等号成立．故最小值为 -3.

题目 2 （改编自第四届 XMO 第二题）实数 a，b，c，d 满足

$$a^2+b^2+c^2+d^2=4,$$

求证：

$$(abc)^3+(bcd)^3+(cda)^3+(dab)^3\le 4.$$

解答（PDF 中已展开）

分析用 x，y，z，w 代替 a^2，b^2，c^2，d^2 后，本题变为：

题目 2' 非负实数 x，y，z，w 满足

$$x+y+z+w=4,$$

求证：

$$(xyz)^{\frac{3}{2}}+(yzw)^{\frac{3}{2}}+(zwx)^{\frac{3}{2}}+(wxy)^{\frac{3}{2}}\le 4.$$

解答（PDF 中已展开）

证明由均值不等式：

$$\begin{aligned}
&(xyz)^{\frac{3}{2}}\\
=&xyz\cdot\left(\sqrt[4]{x\cdot y\cdot z\cdot 1}\right)^2\\
\leq&xyz\cdot\left(\frac{x+y+z+1}{4}\right)^2\\
=&\frac{1}{16}xyz(5-w)^2
\end{aligned}$$

故只需证明:

$$\sum_{cyc}xyz(5-w)^2\leq 64$$

而

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}xyz(5-w)^2\\
=&\sum_{cyc}\left(xyzw^2-10xyzw+25xyz\right)\\
=&xyzw(x+y+z+w)-40xyzw+25\sum_{cyc}xyz\\
=&-36xyzw+25\sum_{cyc}xyz
\end{aligned}$$

接下来用调整法容易证明，上式在 $x=y=z=w=1$ 时取得最大值 64. 在此略去.

类似地可以推广为 n 元形式:

题目 3 实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 满足

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=n,$$

求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=i}^{i+n-2}a_i\right)^3\leq n.$$

解答（PDF 中已展开）

证明方法同上.