多面体欧拉公式的几个简单应用

2022-01-14 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_42a6b89a1fac38e3

在凸多面体中，其顶点 (vertex) 数 V，边 (edge) 数 E，面 (face) 数 F 满足如下关系式：

$$V-E+F=2$$

例如：四面体有 4 个顶点、6 条边、4 个面，$4-6+4=2$.
三棱柱有 6 个顶点、9 条边、5 个面，$6-9+5=2$.
正方体有 8 个顶点、12 条边、6 个面，$8-12+6=2$.

该公式最早由欧拉在 1750 年提出，大部分证明均采用了数学归纳法，以下链接中给出了 20 种证明.

https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/eul

这里给出 Cauchy 的证明：

从多面体去掉一面，通过把去掉的面的边互相拉远，把所有剩下的面变成点和曲线的平面网络. 不失一般性，可以假设变形的边继续保持为直线段. 正常的面不再是正常的多边形即使开始的时候它们是正常的. 但是，点、边和面的个数保持不变，和给定多面体的一样 (移去的面对应网络的外部).

重复一系列可以简化网络却不改变其欧拉数（也是欧拉示性数）$V-E+F$ 的额外变换.

1. 若有一个多边形面有 3 条边以上，我们划一个对角线. 这增加一条边和一个面. 继续增加边直到所有面都是三角形.
2. 除掉只有一条边和外部相邻的三角形. 这把边和面的个数各减一而保持顶点数不变.
3. （逐个）除去所有和网络外部共享两条边的三角形. 这会减少一个顶点、两条边和一个面.

重复使用第 2 步和第 3 步直到只剩一个三角形. 对于一个三角形 $F=2$（把外部数在内），$E=3$，$V=3$. 所以 $F-E+V=2$.

证毕.

下面给出欧拉公式的几个简单应用：

1. 证明：柏拉图多面体（正多面体，即每个面都是全等的正多边形）只有 5 种.

证明：

设正多面体每个面都有 $n(n\geq 3)$ 条边，每个顶点关联 $k(k\geq 3)$ 条边，并设多面体有 V 个顶点，E 条边，F 个面.

- 每个面有 n 条边，故共有 nF 条边，而每条边被两个相邻的面各计算一次，于是有

$$nF = 2E$$

- 每个面有 k 条边，故共有 kV 条边，而每条边被两个相邻的顶点各计算一次，于是有

$$kV = 2E$$

代入欧拉公式

$$V - E + F = 2$$

得

$$\frac{2E}{k} - E + \frac{2E}{n} = 2$$

即

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}$$

若 $k \geq 4$，且 $n \geq 4$，则

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{E}$$

矛盾！因此 k，n 中至少有一个不大于 3，而 $n \geq 3$，$k \geq 3$，故 k，n 中必有一个为 3.

1. $n = 3$，则 $\frac{1}{k} = \frac{1}{6} + \frac{1}{E} > \frac{1}{6}$，即 $k < 6$. 故 $k = 3, 4, 5$.
   $k = 3$ 时，$E = 6$，$F = 4$，$V = 4$.
   $k = 4$ 时，$E = 12$，$F = 8$，$V = 6$.
   $k = 5$ 时，$E = 30$，$F = 20$，$V = 12$.
2. $k = 3$，则则 $\frac{1}{n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{E} > \frac{1}{6}$，即 $n < 6$. 故 $n = 3, 4, 5$.
   $n = 3$ 时，$E = 6$，$F = 4$，$V = 4$.
   $n = 4$ 时，$E = 12$，$F = 6$，$V = 8$.
   $n = 5$ 时，$E = 30$，$F = 12$，$V = 20$.

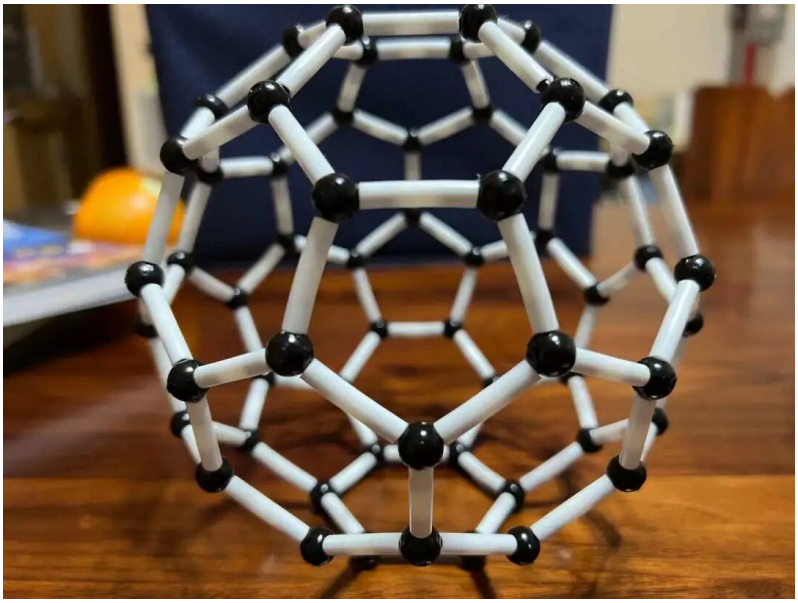
去掉一个重复的情况，可得正多面体只有正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体这五种.

类似可证明如下结论：

> 2. 证明：阿基米德多面体（半正多面体，即由边数不全相同的正多边形为面的多面体）只有 13 种.

证明略.

在阿基米德多面体中，有一种多面体被我们所熟知，即由正五边形和正六边形组成的 32 面体，富勒烯 C_{60}（又称足球烯）的结构就是如此. 当然，这也是我们常见的足球表面黑白色块的组成方式，C_{60} 因此得名足球烯.



3. 已知上述图形由正五边形和正六边形组成，且每个正五边形周围有 5 个正六边形，每个正六边形周围有 3 个正五边形和 3 个正六边形. 求这个多面体的面数、顶点数和边数.

解：

设这个多面体有 a 个正五边形的面，b 个正六边形的面，E 条边，V 个顶点.

- 每个正五边形的面周围有 5 个正六边形的面，但每个正六边形的面在 6 个正五边形的面周围，被重复计算了 6 次. 因此

$$5a = 3b$$

- 每个正五边形的面有 5 条边，每个正六边形的面有 6 条边，于是共有 $5a + 6b$ 条边，但每条边被相邻两个面各计算了一次. 因此

$$5a + 6b = 2E$$

- 每个正五边形的面有 5 个顶点，每个正六边形的面有 6 个顶点，于是共有 $5a + 6b$ 个顶点，但每个顶点被相邻三个面各计算了一次. 因此

$$5a + 6b = 3V$$

- 由欧拉公式：

$$V - E + a + b = 2$$

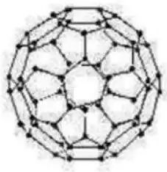
解得：

$$\begin{cases} a = 12 \\ b = 20 \\ E = 90 \\ V = 60 \end{cases}$$

因此有 12 个正五边形面，20 个正六边形面，90 条边，60 个顶点.

值得一提的是，本题在 1997 年全国高考的化学试卷最后一题中出现，并且还考察了 C_{70} 的结构，方法也是类似的. 题目如下：

36.(12 分)1996 年诺贝化学奖授予对发现 C_{60} 有重大贡献的三位科学家.C_{60} 分子是形如球状的多面体(如图),该结构的建立基于以下考虑:
①C60 分子中每个碳原子只跟相邻的 3 个碳原子形成化学键;
②C60 分子只含有五边形和六边形;
③多面体的顶点数、面数和棱边数的关系,遵循欧拉定理:



据上所述,可推知 C_{60} 分子有 12 个五边形和 20 个六边形,C_{60} 分子所含的双键数为 30.
请回答下列问题:
(1)固体 C_{60} 与金刚石相比较,熔点较高者应是_____,理由是:
_____.
(2)试估计 C_{60} 跟 F_2 在一定条件下,能否发生反应生成 $C_{60}F_{60}$(填“可能”或“不可能”)_____,并简述其理由:
_____.
(3)通过计算,确定 C_{60} 分子所含单键数.
C_{60} 分子所含单键数为_____.
(4)C_{70} 分子也已制得,它的分子结构模型可以与 C60 同样考虑而推知.通过计算确定 C_{70} 分子中五边形和六边形的数目.
C_{70} 分子中所含五边形数为_____,六边形数为_____.

最后是一道 2020 年 CMO 的图论题：

4. P 是一个凸多面体，满足以下两个性质：
(i)P 的每一个顶点恰属于 3 个不同的面；
(ii) 对任意 $k \geq 3$，P 中 k 边形面都恰有偶数个.
有一只蚂蚁从某条棱的中点出发，沿棱爬行，走一条闭合路径 L，经过 L 上每一点恰好一次，最终回到出发点. L 将 P 的表面分为两部分，使得对任意 $k \geq 3$，两部分中 k 边形面的个数相等.
求证：蚂蚁在爬行中向左转和向右转的次数相等.

证明：

设 L 的两侧各有 N 个面，其中一侧 A 有 a 个内部点，另一侧 B 有 b 个内部点. 再设 L 上转向 A 的点有 m 个（即该点所连的另一条边不在 A 内），转向 B 的点有 n 个.

由两部分 k 边形面的个数均相等知，每部分顶点和棱的个数均相等，这里的个数是指重复计数的结果.

由条件 (i)，每个内部点在该部分被计 3 次，转向该部分的点只属于该部分的一个面，故被计 1 次，转向另一个部分的点被计 2 次. 因此由顶点个数相等，有

$$3a + m + 2n = 3b + 2m + n$$

即

$$3a - 3b = m - n$$

A 部分每个内部点连出 3 条边，转向 A 的点连出 2 条边，转向 B 的点连出 3 条边，故共有 $\frac{1}{2}(3a + 2m + 3n)$ 条边，同理 B 部分有 $\frac{1}{2}(3b + 3m + 2n)$ 条边.

对两个部分分别使用欧拉公式，这里将 L“压平”，使两部分均成为一个新的多面体，此时面数增加 1. 于是有

$$(m + n + a) + (N + 1) - \frac{1}{2}(3a + 2m + 3n) = 2$$

$$(m + n + b) + (N + 1) - \frac{1}{2}(3b + 3m + 2n) = 2$$

两式相减得:

$$(a - b) - \frac{1}{2}(3a - 3b - m + n) = 0$$

即

$$a - b = m - n$$

结合

$$3a - 3b = m - n$$

知 $m = n$，证毕.