数学竞赛每日一练第 21 期解答

2021-06-25 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4342d7a1efc54ea2

若有且只有一个正方形，其中心位于原点，且其四个顶点在曲线 $y=x^3+ax$ 上，求实数 a 的值.

解答（PDF 中已展开）

解答若 $a\geq 0$，此曲线在 $x>0$ 时只位于第一象限. 设 y 轴右侧正方形顶点为 A，B，那么 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角必为锐角，不合题意.

若 $a<0$，假设 A 在第一象限，B 在第四象限. 则 $OA\perp OB$，且 $OA=OB$. 由对称性，只需考虑 $x>0$ 时的情形.

设 OA：$y=kx(k>0)$，则 OB：$y=-\dfrac{1}{k}x$.

联立

$$\begin{cases}y=kx\\ y=x^3+ax\end{cases}$$

得 $A\left(\sqrt{k-a},k\sqrt{k-a}\right)$，同理 $B\left(\sqrt{-\dfrac{1}{k}-a},-\dfrac{1}{k}\sqrt{-\dfrac{1}{k}-1}\right)$.

由 $OA=OB$ 得：

$$(k-a)(1+k^2)=\left(-\frac{1}{k}-a\right)\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

即

$$k^4-ak^3+ak+1=0$$

于是原题等价于：求负数 a，使方程

$$k^4-ak^3+ak+1=0$$

恰有一个正数解.

$$\begin{aligned}&k^4-ak^3+ak+1=0\\ \iff\ &k^2+\frac{1}{k^2}=a\left(k-\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

显然 $k\neq 1$，令 $t=k-\dfrac{1}{k}\neq 0$，则 $t^2+2=at$.

即求负数 a，使 $t^2-at+2=0$ 恰有一个非零实数解.

于是 $\Delta=a^2-8=0$ 且 $a<0$.

$\therefore a = -2\sqrt{2}.$