2023 年乌克兰数学奥林匹克

2023-04-06　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_43c1a39e6fb68b95

八年级组

第一天

1. Oleksiy 在 8×8 棋盘的每一格中各写入一个正整数. 对于每一对相邻的格子，Fedir 写下它们内数字的积，并将所有积相加. 而 Oleksiy 则写下每一对相邻格子内数字的和，并将所有和相乘. 结果发现这两个数的个位数字都是 1. 证明至少有一个人算错了.
   例如，对于 3×3 的正方形，给出数字排列如下. 则 Fedir 写下的数字为：$2, 6, 8, 20, 28, 35, 3, 5, 4, 7, 8, 21$，它们的和的个位数字为 6；Oleksiy 写下的数字为：$5, 10, 13, 9, 12, 14, 4, 6, 11, 15$，它们的积的个位数字为 0.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{array}$$

1. 某个国家中举办了一场网球单循环比赛（每个人正好与所有其他人各打一次）. 获胜者得 1 分，失败者得 0 分，没有平局. 在比赛结束后，Oleksiy 看到了每个参赛选手的得分，以及整个比赛的赛程安排，其中显示了每场比赛的对手，但没有显示胜利者. 他可以按任意顺序选择比赛并尝试猜出胜者，此后会告知他是否猜对. 证明：Oleksiy 可以采取某种策略，使他保证能够猜对超过半数的比赛胜利者.

2. 正整数 x，y 满足

$$\sqrt{x^2+2y} > \frac{2}{3}, \sqrt{y^2+2x} > \frac{2}{3}$$

   求证：$x = y$.
   注：$\{x\}$ 表示 x 的小数部分. 例如：$\{3.14\} = 0.14$.

3. 在菱形 $ABCD$ 所在平面内取一点 T，使得 $\angle ATC + \angle BTD = 180^\circ$，且三角形 ATC 和 BTD 的外接圆相切. 证明：T 到菱形两条对角线的距离相等.

第二天

1. 是否存在 10 个不全相等的实数，使得每一个数都等于其余 9 个数的平方和?

2. 凸五边形 $ABCDE$ 满足 $AB \parallel CD$，$BC \parallel DE$，$\angle BAE = \angle AED$. 求证：$AB + BC = CD + DE$.

3. 某国有 n 个机场，其中 $n \geq 3$，一些机场之间有双向航班．每天政府会关闭一个出发航班数量最多的机场。这个过程最多可以进行多少天?

4. 给定一个 m 元整数集，对于某个正整数 n，这些整数模 n 的余数互不相同．证明：对于任意 $k \leq m$，都可以将这个集合划分成 k 个非空子集，使得每个子集中元素的和模 n 的余数互不相同.

九年级组

第一天

1. 有 $n \geq 4$ 个实数排在一个圆周上．已知对于任意四个按顺序排列在圆周上的实数 a, b, c, d，都有 $a + d = b + c$．求 n 的取值，使得所有圆周上的数字都相等.

2. 正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{101}$ 满足：对任意 $1 \leq i \leq 101$，都有 $a_i + 1$ 能被 a_{i+1} 整除，其中 $a_{102} = a_1$．求 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_{101}\}$ 的最大可能值.

3. 锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω．在 AC 上取点 F，在 AB 上取点 E，在 ω 上取点 P, Q，使得 $\angle AFB = \angle AEC = \angle APE = \angle AQF = 90^\circ$．求证：直线 BC, EF, PQ 共点或平行.

4. 求最小的实数 C，使得对任意正整数 $x \neq y$，都有

$$\min\left(\sqrt{x^2 + 2y}, \sqrt{y^2 + 2x}\right) < C$$

注：$\{x\}$ 表示 x 的小数部分．例如：$\{3.14\} = 0.14$.

第二天

1. （同八年级组第 5 题）是否存在 10 个不全相等的实数，使得每一个数都等于其余 9 个数的平方和?

2. 点 O 在 $\triangle ABC$ 内部，满足 $\angle BOC = 90^\circ - \angle BAC$．$BO$ 交 AC 于点 K，CO 交 AB 于点 L．点 K_1, L_1 分别在线段 CL, BK 上，满足 $K_1B = K_1K$，$L_1C = L_1L$．M 为 BC 中点，求证：$\angle K_1ML_1 = 90^\circ$.

3. 给定 $n \geq 2$ 个不同的正整数．如果其中两个整数之和是 2 的非负整数次幂，则称这一对整数是优美的．对于任意的 n，求优美数对个数的最大可能值.

4. 如果存在唯一的方式将 $2n$ 个节点分成 n 对，使得每一对中的两个节点之间有边相连，则在这样一个图中，边数可能的最大值是多少?

十年级组

第一天

1. 求所有正整数 k，使得存在连续的 k 个正整数的乘积的个位数字为 k.

2. 在一个 100×300 的矩形棋盘上，两个人轮流着给未被涂色的格子涂色．第一个人用黄色，第二个人用蓝色．当所有格子都被涂色时，涂色过程结束．一个连通的格子序列是指这样一串格子：其中每两个相邻的格子有一个公共的边（且序列中所有格子都不同）．考虑所有可能的黄色连通格子序列．第一个玩家的成绩是最长的黄色连通格子序列的长度，第一个玩家的目标是使自己的成绩尽可能大，第二个玩家的目标则是尽可能地减小第一个玩家的成绩．证明：如果每个玩家都试图达到自己的目标，则第一个玩家的成绩不会超过 200.

3. 设 I 是三角形 ABC 的内心，P 是其外接圆上弧 $\widehat{BAC}$ 上的任意一点．在三角形 API 的外接圆 ω 于点 I 处的切线上取点 K 和 L，满足 $BK = KI$ 且 $CL = LI$．证明：三角形 PKL 的外接圆与圆 ω 相切.

4. 设无穷实数列 $\{x_n\}$ 的每一项均在 $(0,1)$ 内．定义无穷正整数列 $\{a_n\}$ 如下：$a_1 = 1$，对于 $i \geq 1$，a_{i+1} 为满足 $[x_1 + x_2 + \cdots + x_m] = a_i$ 的最小正整数 m．证明：对于任意的 i, j，都有 $a_{i+j} \geq a_i + a_j$.

第二天

1. （同八年级组第 6 题）凸五边形 $ABCDE$ 满足 $AB \parallel CD$，$BC \parallel DE$，$\angle BAE = \angle AED$. 求证：$AB + BC = CD + DE$.

2. 设 $P(x)$、$Q(x)$ 和 $R(x)$ 为整系数多项式，满足 $P(x) = Q(x)R(x)$．令 a 和 b 分别为 P 和 Q 的系数的绝对值中的最大值．那么 $b \leq 2023a$ 是否总是成立?

3. 已知 $n \geq 2$ 个不同的正整数．对于其中任意一对 $a < b$，Vlada 在黑板上写下了 2 的最大幂次，该幂次能够整除 $b - a$．Vlada 最多能写下多少个不同的 2 的幂次?

4. 考虑一个有 4046 个节点的完全图，它的边被染成一些不同的颜色．如果我们能够将所有节点分成 2023 对，使得连接同一对中的节点的 2023 条边的颜色恰好为 k 种，则称这个图是 k-好的。那么这个图是否可能既是 999-好的又是 1001-好的，但不是 1000-好的?

十一年级组

第一天

1. 集合 M 包含 n 个不小于 2 的正整数．已知对于任意的不同的 $a, b \in M$，$a^2 + 1$ 均是 b 的倍数．n 的最大可能值是多少?

2. 在平面上选择 2022 个点 A_1，A_2，$\cdots$，A_{2022}，使得它们中任意三个不共线．考虑所有由不同的三个点 A_i、A_j、A_k 组成的 $\angle A_iA_jA_k$．其中最多有多少个角是直角?

3. 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$．设 $P = AC \cap BD$，$Q = AB \cap CD$，$R = AD \cap BC$．设 ℓ 是三角形 PQR 的中位线，且平行于 QR．证明：由直线 AB、AD、ℓ 所围成的三角形的外接圆与由直线 CD、CB、ℓ 所围成的三角形的外接圆相切.

4. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意实数 x，y，都有

$$f(x+yf(x+y))=f(y^2)+xf(y)+f(x)$$

第二天

1. 如果一个多项式同时具有正系数和负系数（0 不被视为正或负），则称其为 “混合多项式”. 两个混合多项式的乘积是否总是混合多项式?

2. 设点 K 为 $\triangle ABC$ 的中线 AM 的中点.点 X 在 AB 上,满足 $\angle KXM=\angle ACB, AX>BX$; 点 Y 在 AC 上，满足 $\angle KYM=\angle ABC$，$AY>CY$. 求证：B,C,X,Y 四点共圆.

3. 考虑正整数 n 的所有约数 $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$. 对 $2\le i\le k-1$，称约数 d_i 是好的，如果 $d_{i-1}d_{i+1}$ 不能被 d_i 整除. 求所有的 n，使得其好的约数个数小于其不同的质因子个数.

4. 某个国家有 2024 个城市，每两个城市之间都通过铁路、航空或公路这三种交通方式中的一种来进行双向连接. 一个旅游者到达了这个国家，并掌握了整个交通方案. 他选择了一种交通方式的旅行票，并选择了出发旅行的城市. 他希望尽可能多地访问城市，但只能使用指定类型的交通方式的票. 无论如何，该旅游者总能访问至少 k 个城市，请问 k 的最大值是多少？在旅途中，他可以回到已经访问过的城市.