2023 年伊比利亚美洲数学奥林匹克

2023-09-15 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_43d8a1c9d6ac91ec

2023 年伊比利亚美洲数学奥林匹克

程国根 译

第一天

1. 设 n 为正整数. 求证: 在以下 35 个乘积之中, 至少一个数中数码 7 至少出现了一次.

$$1 \cdot n, 2 \cdot n, \cdots, 35 \cdot n$$

2. 设 $\mathbb{Z}$ 为全体整数组成的集合. 求所有函数 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, 使得对任意整数 x, 都有

$$2023f(f(x)) + 2022x^2 = 2022f(x) + 2023[f(x)]^2 + 1.$$

3. Ana 和 Beto 用一个天平进行游戏. 一共有 2023 个标有质量的哑铃, 质量分别为 $1, 2, \cdots, 2023$, 且没有重复. 两人轮流选择一个未被放在天平上的哑铃, 并将它放在此时天平较轻的一侧. 如果此时天平是平衡的, 则将哑铃随意放在一侧. 游戏从 Ana 开始, 然后两人轮流行动. 若将所有哑铃放完之后, 天平是平衡的, 则 Ana 获胜, 否则 Beto 获胜. 问: 谁有必胜策略? 并描述必胜策略.

2023 年伊比利亚美洲数学奥林匹克

程国根　译

第二天

4. 设 B,C 为平面上两个定点，动点 A 不在直线 BC 上，G 为 $\triangle ABC$ 的重心．求所有满足 $\angle BAC+\angle BGC=180^\circ$ 的点 A 的轨迹．

5. 称平面上的一列点 $P_1,\cdots,P_n$（不必互异）是**里约热内卢的**，若存在 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $a_1,\cdots,a_n$，使得线段 $P_{a_1}P_{a_2},P_{a_2}P_{a_3},\cdots,P_{a_n}P_{a_1}$ 的长度均相等．求最大的正整数 k，使得对平面上任意 k 个点，均可以通过添加 $2023-k$ 个点，使得这 2023 个点是**里约热内卢的**．

6. 设 P 是一个次数至少为 4 的整系数多项式．如果存在整数 a,b，使得 $x=P(a)-P(b)$，则称整数 x 能被 P 表示．求证：若对任意自然数 N，集合 $\{0,1,\cdots,N\}$ 中都有至少一半的数能被 P 表示，则要么所有奇数都能被 P 表示，要么所有偶数都能被 P 表示．

注：以下四个图分别为拉丁美洲，南美洲，伊比利亚美洲，西班牙语美洲．



最后附上 tex 文档:

2023 年伊比利亚美洲数学奥林匹克

程国根　译

第一天

1. 设 n为正整数. 求证: 在以下 35个乘积之中，至少一个数中数码 7至少出现了一次. $$1\cdot n,2\cdot n,\cdots,35\cdot n$$

2. 设 $\mathbb{Z}$为全体整数组成的集合. 求所有函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对任意整数 x，都有 $$2023f(f(x))+2022x^2=2022f(x)+2023[f(x)]^2+1.$$

3. Ana 和 Beto 用一个天平进行游戏. 一共有 2023个标有质量的哑铃，质量分别为 $1,2,\cdots,2023$，且没有重复. 两人轮流选择一个未被放在天平上的哑铃，并将它放在此时天平较轻的一侧. 如果此时天平是平衡的，则将哑铃随意放在一侧. 游戏从 Ana 开始，然后两人轮流行动. 若将所有哑铃放完之后，天平是平衡的，则 Ana 获胜，否则 Beto 获胜. 问: 谁有必胜策略? 并描述必胜策略.

2023 年伊比利亚美洲数学奥林匹克

程国根　译

第二天

4. 设 B,C为平面上两个定点，动点 A不在直线 BC上，G为 $\triangle ABC$的重心. 求所有满足 $\angle BAC+\angle BGC=180^{\circ}$的点 A的轨迹.

5. 称平面上的一列点 $P_{1},\cdots,P_{n}$（不必互异）是**里约热内卢的**，若存在 $1,2,\cdots,n$的一个排列 $a_{1},\cdots,a_{n}$，使得线段 $P_{a_{1}}P_{a_{2}},P_{a_{2}}P_{a_{3}},\cdots,P_{a_{n}}P_{a_{1}}$的长度均相等. 求最大的正整数 k，使得对平面上任意 k个点，均可以通过添加 $2023-k$个点，使得这 2023个点是**里约热内卢的**.

6. 设 P是一个次数至少为 4的整系数多项式. 如果存在整数 a,b，使得 $x=P(a)-P(b)$，则称整数 x能被 P表示. 求证：若对任意自然数 N，集合 $\{0,1,\cdots,N\}$中都有至少一半的数能被 P表示，则要么所有奇数都能被 P表示，要么所有偶数都能被 P表示.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2023年伊比利亚美洲数学奥林匹克}\flushright 程国根\quad 译\section*{第一天}\ex 设$n$为正整数. 求证:
↪ 在以下$35$个乘积之中，至少一个数中数码$7$至少出现了一次. $$1\cdot n,2\cdot n,\cdots,35\cdot n$$\vfill\ex
↪ 设$\mathbb{Z}$为全体整数组成的集合. 求所有函数$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对任意整数$x$，
↪ 都有$$2023f(f(x))+2022x^2=2022f(x)+2023[f(x)]^2+1.$$\vfill\ex Ana和Beto用一个天平进行游戏.
↪ 一共有$2023$个标有质量的哑铃，质量分别为$1,2,\cdots,2023$，且没有重复. 两人轮流选择一个未被放在天平上的哑铃，
↪ 并将它放在此时天平较轻的一侧. 如果此时天平是平衡的，则将哑铃随意放在一侧. 游戏从Ana开始，然后两人轮流行动.
↪ 若将所有哑铃放完之后，天平是平衡的，则Ana获胜，否则Beto获胜. 问：谁有必胜策略？并描述必胜策略.
↪ \vfill\newpage\section*{2023年伊比利亚美洲数学奥林匹克}\flushright 程国根\quad 译\section*{第二天}\ex
↪ 设$B,C$为平面上两个定点，动点$A$不在直线$BC$上，$G$为$\triangle ABC$的重心. 求所有满足$\angle BAC+\angle
↪ BGC=180^{\circ}$的点$A$的轨迹. \vfill\ex 称平面上的一列点$P_{1},\cdots,P_{n}$（不必互异）是\textbf{里约热内卢的},
↪ 若存在$1,2,\cdots,n$的一个排列$a_{1},\cdots,a_{n}$，
↪ 使得线段$P_{a_{1}}P_{a_{2}},P_{a_{2}}P_{a_{3}},\cdots,P_{a_{n}}P_{a_{1}}$的长度均相等.
求最大的正整数$k$，使得对平面上任意$k$个点，均可以通过添加$2023-k$个点，使得这$2023$个点是\textbf{里约热内卢的}.
↪ \vfill\ex 设$P$是一个次数至少为$4$的整系数多项式. 如果存在整数$a,b$，使得$x=P(a)-P(b)$，则称整数$x$能被$P$表示.
↪ 求证：若对任意自然数$N$，集合$\{0,1,\cdots,N\}$中都有至少一半的数能被$P$表示，则要么所有奇数都能被$P$表示，
↪ 要么所有偶数都能被$P$表示. \vfill
```