2026 年巴西数学奥林匹克（高中组）

2026-10-17　原文链接

网站版本 379b168aed55 · 文章 ID h_449b3bfc4a205b0f

题文来源：OBM 官方 Level 3 试卷

第一天

第 1 题

设三角形 ABC 满足 $\angle BAC = 60^\circ$ 且 $AB < AC$. 分别以 O 和 I 表示三角形 ABC 的外心和内心，以 T 表示三角形 BIC 的垂心.

(a) 证明：B, C, O, I 四点共圆.

(b) 证明：直线 BC, OI, AT 交于同一点.

第 2 题

设 p 为奇素数. 求最小的正整数 k，使得存在正整数 n，当

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}$$

分别除以 p 时，余数 $0, 1, \ldots, p-1$ 每一个都至少出现一次.

注：对于非负整数 a, b，定义

$$\binom{a}{b} = \begin{cases} 0, & a < b, \\ \dfrac{a!}{b!(a-b)!}, & a \geq b. \end{cases}$$

第 3 题

对于 $(1, 2, 3, \ldots, 2026)$ 的每一个排列 $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2026})$，考虑下列各数：

$$\begin{aligned} &a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 2025a_{2025} + 2026a_{2026}, \\ &a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + 2025a_{2026} + 2026a_1, \\ &\quad\vdots \\ &a_{2026} + 2a_1 + 3a_2 + \cdots + 2025a_{2024} + 2026a_{2025}. \end{aligned}$$

定义 $f(a)$ 为上述 2026 个和中不同数值的个数. 当 a 遍历 $(1, 2, 3, \ldots, 2026)$ 的所有排列时，$f(a)$ 的最小可能值是多少?

第二天

第 4 题

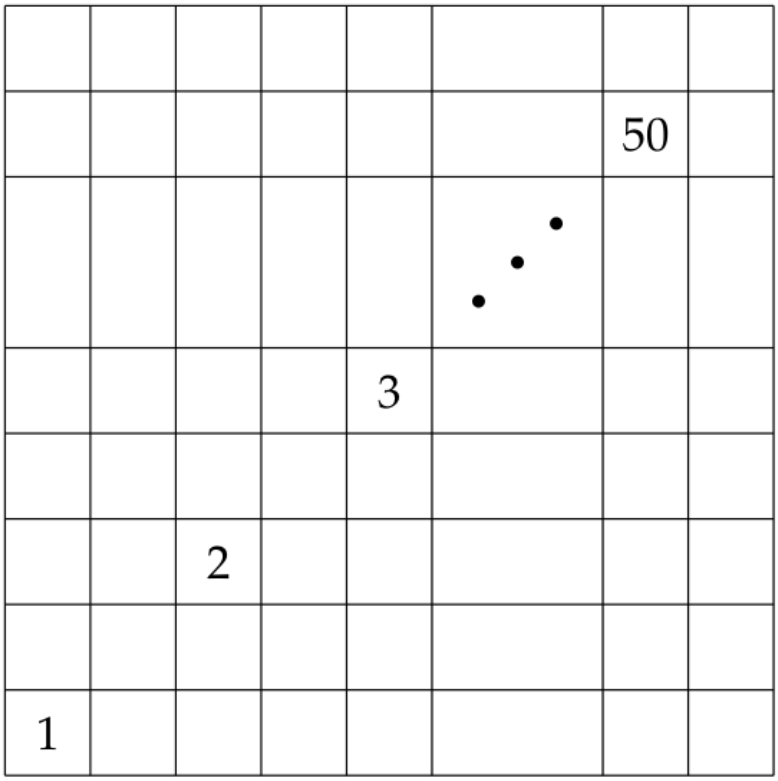
对于正整数 n，定义

$$f(n)=\left\lfloor\sqrt{(n+1)^3}\right\rfloor-\left\lfloor\sqrt{n^3}\right\rfloor.$$

证明：存在无穷多个正整数 n，使得 $f(n+1)<f(n)$.

第 5 题

在一个 100×100 的棋盘上，已经有 50 个方格按下图所示填入了数字：



埃斯梅拉达希望在一些空白方格内填入正整数，使最终的棋盘满足以下条件：

“不存在两个共用一条边、且所填数字不同的方格. ”

除去已经填好数字的 50 个方格，埃斯梅拉达最多还能填多少个方格，使上述条件成立?

第 6 题

设 ABC 为锐角三角形，M 为边 BC 的中点，D,E 分别为边 AB,AC 上的点，满足 $MD=ME$. 过 D 且垂直于 AB 的直线与过 E 且垂直于 AC 的直线交于 P. 分别以 R,S 表示点 P 关于直线 AB,AC 的对称点. 直线 BR 与 CS 交于 Q. 分别以 K,L 表示点 Q 在直线 AB,AC 上的垂足. 证明：$DL=EK$.