数学竞赛每日一练第 11 期解答

2021-06-14 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_44a27bcee1baf0e6

解答（PDF 中已展开）

证明：存在无穷多个互不相似的三角形 $\triangle_n$，其边长 a_n，b_n，c_n 为正整数，且 a_n^2，b_n^2，c_n^2 成等差数列.

证明当 a_n^2，b_n^2，c_n^2 成等差数列，则

$$b_n^2-a_n^2=c_n^2-b_n^2$$

分解得：

$$(b_n+a_n)(b_n-a_n)=(c_n+b_n)(c_n-b_n)$$

选取关于 n 的一个多项式 $4n(n^2-1)$ 做两种途径的分解

$$\begin{aligned}&4n(n^2-1)\\=&(2n-2)(2n^2+2n)\\=&(2n^2-2n)(2n+2)\end{aligned}$$

对比目标式，构造

$$\begin{cases}a_n=n^2-2n-1\\b_n=n^2+1\qquad(n\geq 4)\\c_n=n^2+2n-1\end{cases}$$

易验证 a_n，b_n，c_n 满足

$$(b_n+a_n)(b_n-a_n)=(c_n+b_n)(c_n-b_n)$$

因此 a_n^2，b_n^2，c_n^2 成等差数列.

当 $n\geq 4$ 时，有 $a_n<b_n<c_n$，且

$$a_n+b_n-c_n=n^2-4n+1>0$$

因此以 a_n，b_n，c_n 为边长可以构成三角形，将此三角形记为 $\triangle_n$（$n\geq 4$).

其次，任取正整数 m，n（$m,n\geq 4$，且 $m\neq n$），假若三角形 $\triangle_m$ 与 $\triangle_n$ 相似，则有：

$$\frac{m^-2m-1}{n^2-2n-1}=\frac{m^2+1}{n^2+1}=\frac{m^2+2m-1}{n^2+2n-1}$$

据比例性质有:

$$\begin{aligned}\frac{m^2+1}{n^2+1}=&\frac{m^2+2m-1}{n^2+2n-1}\\=&\frac{m^2+2m-1-(m^2+1)}{n^2+2n-1-(n^2+1)}\\=&\frac{m-1}{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{m^2+1}{n^2+1}=&\frac{m^2-2m-1}{n^2-2n-1}\\=&\frac{m^2-2m-1-(m^2+1)}{n^2-2n-1-(n^2+1)}\\=&\frac{m+1}{n+1}\end{aligned}$$

所以 $\frac{m+1}{n+1}=\frac{m-1}{n-1}$，由此可得 $m=n$，与假设 $m\neq n$ 矛盾，即任两个三角形 $\triangle_m$ 与 $\triangle_n$ $(m,n\geq 4,m\neq n)$ 互不相似，所以存在无穷多个互不相似的三角形 $\triangle_n$，其边长 a_n，b_n，c_n 为正整数 a_n^2，b_n^2，c_n^2 成等差数列.