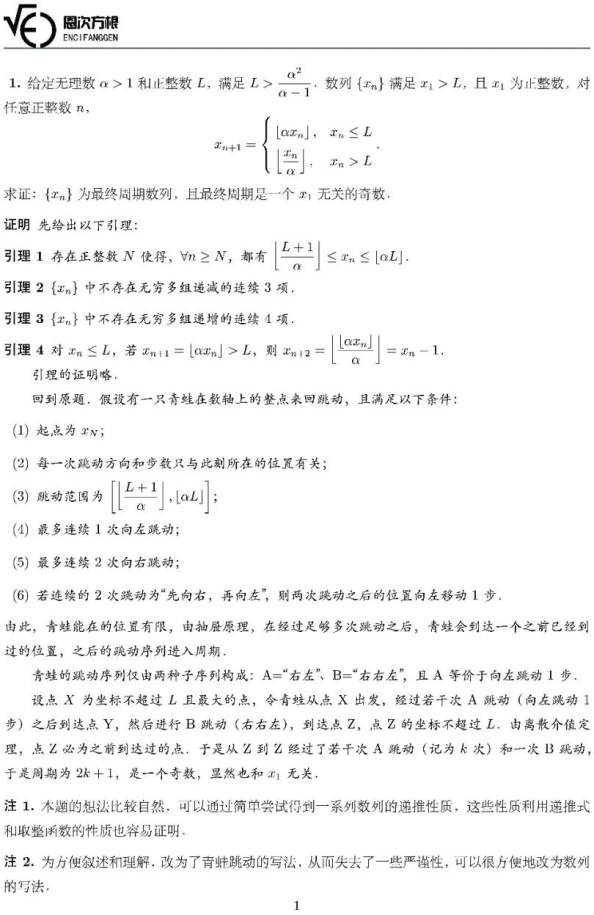
# 2024 年 CMO 第一天部分试题解答

2024-11-28　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4544d870d2659062

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。



恩次方根
ENCIFANGGEN

**1.** 给定无理数 $\alpha>1$ 和正整数 $L$，满足 $L>\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$. 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>L$，且 $x_1$ 为正整数，对任意正整数 $n$，

$$x_{n+1}=\begin{cases}\lfloor \alpha x_n\rfloor, & x_n\le L\\ \left\lfloor \dfrac{x_n}{\alpha}\right\rfloor, & x_n>L\end{cases}.$$

求证：$\{x_n\}$ 为最终周期数列，且最终周期是一个 $x_1$ 无关的奇数.

**证明** 先给出以下引理：

**引理 1** 存在正整数 $N$ 使得，$\forall n\ge N$，都有 $\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor\le x_n\le\lfloor\alpha L\rfloor$.

**引理 2** $\{x_n\}$ 中不存在无穷多组递减的连续 3 项.

**引理 3** $\{x_n\}$ 中不存在无穷多组递增的连续 4 项.

**引理 4** 对 $x_n\le L$，若 $x_{n+1}=\lfloor\alpha x_n\rfloor>L$，则 $x_{n+2}=\left\lfloor\dfrac{\lfloor\alpha x_n\rfloor}{\alpha}\right\rfloor=x_n-1$.

引理的证明略.

回到原题. 假设有一只青蛙在数轴上的整点来回跳动，且满足以下条件：

(1) 起点为 $x_N$；

(2) 每一次跳动方向和步数只与此刻所在的位置有关；

(3) 跳动范围为 $\left[\left\lfloor\dfrac{L+1}{\alpha}\right\rfloor,\lfloor\alpha L\rfloor\right]$；

(4) 最多连续 1 次向左跳动；

(5) 最多连续 2 次向右跳动；

(6) 若连续的 2 次跳动为“先向右，再向左”，则两次跳动之后的位置向左移动 1 步.

由此，青蛙能在的位置有限，由抽屉原理，在经过足够多次跳动之后，青蛙会到达一个之前已经到过的位置，之后的跳动序列进入周期.

青蛙的跳动序列仅由两种子序列构成：A=“右左”、B=“右右左”，且 A 等价于向左跳动 1 步.

设点 $X$ 为坐标不超过 $L$ 且最大的点，令青蛙从点 X 出发，经过若干次 A 跳动（向左跳动 1 步）之后到达点 Y，然后进行 B 跳动（右右左），到达点 Z，点 Z 的坐标不超过 $L$. 由离散介值定理，点 Z 必为之前到达过的点. 于是从 Z 到 Z 经过了若干次 A 跳动（记为 $k$ 次）和一次 B 跳动，于是周期为 $2k+1$，是一个奇数，显然也和 $x_1$ 无关.

**注 1.** 本题的想法比较自然，可以通过简单尝试得到一系列数列的递推性质，这些性质利用递推式和取整函数的性质也容易证明.

**注 2.** 为方便叙述和理解，改为了青蛙跳动的写法，从而失去了一些严谨性，可以很方便地改为数列的写法.

1

恩次方根
ENCIFANGGEN

**2.** 在 $\triangle ABC$ 中，$I$ 为内心，$L,M,N$ 分别为 $AI,AC,CI$ 的中点．点 $D$ 在线段 $AM$ 上，满足 $BC=BD$．$\triangle ABD$ 的内切圆和 $AD,BD$ 分别切于点 $E,F$．点 $J$ 为 $\triangle AIC$ 的外心，$\omega$ 为 $\triangle JMD$ 的外接圆．直线 $MN$ 再次交 $\omega$ 于点 $P$，$JL$ 再次交 $\omega$ 于点 $Q$．求证：$PQ,LN,EF$ 三线共点．

**证明** 注意到 $ID$ 的中点在 $LN$ 上，只需证明 $EF$ 和 $PQ$ 分别平分 $ID$ 即可．

下面分两部分进行证明：

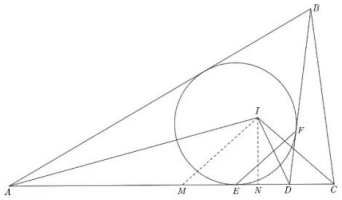
(1) 作 $IM\parallel EF$ 交 $AC$ 于点 $M$，$IN\perp AC$ 交 $AC$ 于点 $N$，则 $N$ 为内切圆 $\odot I$ 在 $AC$ 边的切点．

由 $\angle AMC=\angle FEC=\dfrac{\angle BDC}{2}=\dfrac{\angle BCD}{2}=\angle ICM$ 知 $IM=IC$．

于是 $CM=2CN=BC+CA-AB$，

$DM=CM-CD=BC+CA-AB-CD=BD+AD-AB=2DE$．

又 $IM\parallel EF$，由中位线知 $EF$ 平分 $ID$．




(2) 延长 $QP$ 交 $LN$ 于点 $X$，交 $AI$ 于点 $R$．

由 $J$ 为 $\triangle AIC$ 的外心，且 $L,M$ 分别为 $AI,AC$ 中点知：$JL\perp AI$，$JM\perp AC$．

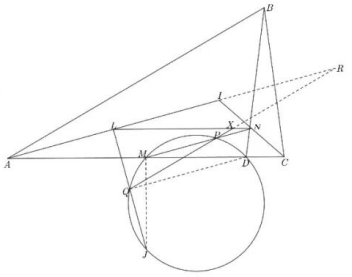
于是 $\angle JQD=\angle JMD=\angle JLI$，即 $QD\parallel AI\parallel MN$（中位线）．

又 $M,P,D,Q$ 四点共圆，故 $MPDQ$ 为等腰梯形．

由位似知 $AQDR$ 也为等腰梯形．

因此 $\angle LRX=\angle RAD=\angle RLX$，即 $LX$ 为直角 $\triangle LQR$ 斜边的中线．

于是 $AD=QR=2LX$，又 $AD\parallel LX$，由中位线知 $QP$ 平分 $ID$．




由 (1) (2) 知，结论成立．

**注 3.** 本题主要难度在于画图，以及观察到所共的点即为 $ID$ 的中点．

**注 4.** 第 (1) 部分即为 2006 年 IMO 预选题 G4，第 (2) 我开始是通过三弦定理计算证明的，后来注意到等腰梯形，得到了这个证明方法．



没去现场，上课间隙码一下个人解答，第 1 题偷懒没写引理的证明.