一个 n 元不等式的引理

2021-05-13 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_45cee313ff916c0b

在昨天的文章中，有一道题目的等价形式如下：

题目 1 x，y，z，w 为非负实数，且 $x+y+z+w=4$. 求证：

$$(xyz)^{\frac{3}{2}}+(yzw)^{\frac{3}{2}}+(zwx)^{\frac{3}{2}}+(wxy)^{\frac{3}{2}}\leq 4.$$

将**题目 1** 稍作改编，次数变为 1，并变为 n 元形式，可得到下面的**题目 2**.

题目 2 设 $n\geq 4$，$x_i\geq 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$. 求

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+\cdots+x_nx_1x_2$$

的最大值.

(**2017 年中国国家集训队试题**)

为解决**题目 2**，我们考虑一个更一般的结论：

引理 $x_i\geq 0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$，$2\leq k<n$. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=i}^{i+k-1}x_j\leq \max\left\{\frac{1}{k^k},\frac{1}{n^{k-1}}\right\}.$$

以下是**引理**部分情况的证明（非原创）：

我们证明 $n\equiv 0,1,-1(\mathrm{mod}\ k)$ 且 n“不太小” 时，不等式成立.

(1) 若存在正整数 $l\geq 2$，使 $n=kl$. 则

$$\frac{1}{n^{k-1}}=\frac{1}{k^{k-1}l^{k-1}}\leq\frac{1}{k^{k-1}2^{k-1}}\leq\frac{1}{k^k}.$$

由均值不等式，有

$$\begin{aligned}&\sum_{cyc}x_1x_2\cdots x_k\\ \leq&(x_1+x_{k+1}+\cdots+x_{(l-1)k+1})\\ &(x_2+x_{k+2}+\cdots+x_{(l-1)k+2})\\ &\cdots\\ &(x_k+x_{2k}+\cdots+x_{lk})\\ \leq&\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{k}\right)^k\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{k^k}$$

当 $x_1=\cdots=x_k=\dfrac{1}{k}$，$x_{k+1}=\cdots=x_n=0$ 时，等号成立.

(2) 若存在正整数 $l\geq 2$，使 $n=lk+1$. 则

$$\frac{1}{n^{k-1}}<\frac{1}{k^{k-1}l^{k-1}}\leq\frac{1}{k^k}.$$

由轮换性不妨设 x_1 为所有的 x_i 中最小的那个. 于是由均值不等式:

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}x_1x_2\cdots x_k\\
=&(x_1\cdots x_k+\cdots x_{n-k+1}\cdots x_n)\\
&+\sum_{r=3}^{k+1}x_{(l-1)k+r}\cdots x_{lk+1}x_1x_2\cdots x_{r-2}\\
\leq&(x_1\cdots x_k+\cdots x_{n-k+1}\cdots x_n)\\
&+\sum_{r=3}^{k+1}x_{(l-1)k+r}\cdots x_{lk+1}x_{r-1}x_2\cdots x_{r-2}\\
\leq&(x_1+x_{k+1}+\cdots+x_{lk+1})\\
&(x_2+x_{k+2}+\cdots+x_{(l-1)k+2})\\
&\cdots\\
&(x_k+x_{2k}+\cdots+x_{lk})\\
\leq&\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{k}\right)^k\\
=&\frac{1}{k^k}
\end{aligned}$$

取等条件同上.

(3) 若存在正整数 l，满足 $k=3$，$l\geq 3$ 或 $k\geq 4$，$l\geq 2$，使 $n=kl-1$. 则仍有

$$\frac{1}{n^{k-1}}\leq\frac{1}{k^k}.$$

由轮换性不妨设 x_k 为所有的 x_i 中最大的那个. 于是由均值不等式:

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}x_1x_2\cdots x_k\\
=&\left(\sum_{i=1}^{n-k+1}x_i\cdots x_{i+k-1}\right)\\
&+x_{(l-1)k+1}x_{(l-1)k+2}\cdots x_{lk-1}x_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{r=2}^{k-1} x_{(l-1)k+r}\cdots x_{lk-1}x_1\cdots x_{r-1}x_r\\
\le&\left(\sum_{i=1}^{n-k+1} x_i\cdots x_{i+k-1}\right)\\
&+x_k x_{(l-1)k+2}\cdots x_{lk-1}x_1\\
&+\sum_{r=2}^{k-1} x_{(l-1)k+r}\cdots x_{lk-1}x_1\cdots x_{r-1}x_r\\
\le&(x_1+x_{k+1}+\cdots+x_{(l-1)k+1})\\
&\cdots\\
&(x_{k-1}x_{2k-1}\cdots x_{lk-1})\\
&(x_k+x_{2k}+\cdots+x_{(l-1)k})\\
\le&\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{k}\right)^k\\
=&\frac{1}{k^k}
\end{aligned}
$$

取等条件同上.

$k=3$，$n=4,5,6$ 的情形比较简单，读者可以自行证明. 至此我们完成了**题目 2** 的证明.

其余情形的证明在此略去，欢迎与作者交流.

特别地，令 $k=2$，注意到

$$\frac{1}{k^k}=\frac{1}{4}\ge\frac{1}{n}=\frac{1}{n^{k-1}}.$$

于是有了以下推论：

推论设 $n\ge 4$，$x_i\ge 0$. 则有

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\\
\ge&4(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1).
\end{aligned}
$$

应用此推论可解决多道国内外竞赛题，例如以下四题.

题目 3 设整数 n（$n>3$），非负实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=2.$$

求

$$\frac{a_1}{a_2^2+1}+\frac{a_2}{a_3^2+1}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+1}$$

的最小值.

(**2007 年中国女子数学奥林匹克**)

题目 4 $a,b,c,d\geq 0$ 且 $a+b+c+d=4$. 求证:

$$\frac{a}{b^3+4}+\frac{b}{c^3+4}+\frac{c}{d^3+4}+\frac{d}{a^3+4}\geq\frac{2}{3}.$$

(**2017 年美国数学奥林匹克**)

题目 5 $n\geq 2$, $a_i\geq 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=n$. 求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{a_{i+1}^3+4}$ 的最小值.

(**题目 4** 的 n 元推广)

题目 6 给定整数 $n\geq 3$. 设 a_1, a_2, $\cdots$, a_{2n}, b_1, b_2, $\cdots$, b_{2n} 是 $4n$ 个非负实数, 满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}>0,$$

且对任意 $i=1,2,\cdots,2n$, 有 $a_ia_{i+2}\geq b_i+b_{i+1}$ (这里 $a_{2n+1}=a_1$, $a_{2n+2}=a_2$, $b_{2n+1}=b_1$).

求 $a_1+a_2+\cdots+a_{2n}$ 的最小值.

(**2020 年全国高中数学联赛**)

解答明天再写, 建议先自己思考。