2024 年泛非数学奥林匹克

2024-09-02　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4623b580be139046

恩次方根
ENCIFANGGEN

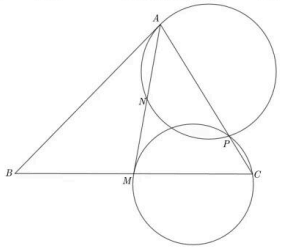
2024 年泛非数学奥林匹克

程国根　译

第一天

1. 求所有正整数 a,b,c，使得 $\frac{a+b}{a+c}=\frac{b+c}{b+a}$，且 $ab+bc+ca$ 为素数.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，M 为边 BC 的中点，N 为线段 AM 的中点，过点 N 且和直线 AC 相切于点 A 的圆与 AB 再次交于点 P. 求证：$\triangle BPM$ 的外接圆和直线 AM 相切.



3. 给定整数 $n\geq 1$，Jo-Ané 交替地在一个 $2n+1$ 行和 $2n+1$ 列的正方形网格的单元格中写 X 和 O：她先在一个单元格中写一个 X，然后在第二个单元格中写一个 O，接着在第三个单元格中写一个 X，以此类推. 当表格全部填满后，将她的得分计为 $\mathcal{X}+\mathcal{O}$，其中 $\mathcal{X}$ 为 X 个数多于 O 个数的行数，$\mathcal{O}$ 是 O 个数多于 X 个数的列数.
求 Jo-Ané 可能得到的最高分数（用 n 表示）.

第二天

4. 在数轴上取 m 条线段，每条线段的两个端点都在整数集合 $\{1,2,\cdots,2024\}$ 中，且任意两条线段的长度都不相等，没有一条线段完全包含在另一条线段中，但两条线段之间可能部分重叠. 求 m 的最大可能值.

5. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意实数 x,y，都有 $f(x^2)-yf(y)=f(x+y)(f(x)-y)$.

6. 求所有整数 n，使得 n^7-41 为完全平方数.

1

2024 年泛非数学奥林匹克

{程国根　译}

第一天

1. 求所有正整数 a,b,c，使得 $\frac{a+b}{a+c}=\frac{b+c}{b+a}$，且 $ab+bc+ca$为素数.

2. 在 $\triangle ABC$中，M为边 BC的中点，N为线段 AM的中点，过点 N且和直线 AC相切于点 A的圆与 AB再次交于点 P. 求证：$\triangle BPM$的外接圆和直线 AM相切.

3. 给定整数 $n\geq 1$，Jo-Ané 交替地在一个 $2n+1$行和 $2n+1$列的正方形网格的单元格中写 X 和 O：她先在一个单元格中写一个 X，然后在第二个单元格中写一个 O，接着在第三个单元

格中写一个 X，以此类推．当表格全部填满后，将她的得分计为 $\mathcal{X}+ \mathcal{O}$，其中 $\mathcal{X}$为 X 个数多于 O 个数的行数，$\mathcal{O}$是 O 个数多于 X 个数的列数．求 Jo-Ané 可能得到的最高分数（用 n表示）．

第二天

4. 在数轴上取 m条线段，每条线段的两个端点都在整数集合 $\{1,2,\cdots,2024\}$中，且任意两条线段的长度都不相等，没有一条线段完全包含在另一条线段中，但两条线段之间可能部分重叠．求 m的最大可能值．

5. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意实数 x,y，都有 $f(x^2) - y f(y) = f(x+y)(f(x)-y)$.

6. 求所有整数 n，使得 $n^{7}-41$为完全平方数．

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年泛非数学奥林匹克}\flushright{程国根\quad 译}\section*{第一天}\ex 求所有正整数$a,b,c$，
↪ 使得$\frac{a+b}{a+c}=\frac{b+c}{b+a}$，且$ab+bc+ca$为素数．\vfill\ex 在$\triangle ABC$中，$M$为边$BC$的中点，
↪ $N$为线段$AM$的中点，过点$N$且和直线$AC$相切于点$A$的圆与$AB$再次交于点$P$．求证：$\triangle
↪ BPM$的外接圆和直线$AM$相切．　　\par\centerline{\includegraphics[scale=0.2]{2024PAMO-2.png}}\vfill\ex
↪ 给定整数$n\geq 1$，Jo-Ané交替地在一个$2n+1$行和$2n+1$列的正方形网格的单元格中写X和O：
↪ 她先在一个单元格中写一个X，然后在第二个单元格中写一个O，接着在第三个单元格中写一个X，以此类推．
↪ 当表格全部填满后，将她的得分计为$\mathcal{X}+ \mathcal{O}$，其中$\mathcal{X}$为X个数多于O个数的行数，
↪ $\mathcal{O}$是O个数多于X个数的列数．
求Jo-Ané可能得到的最高分数（用$n$表示）．\vfill\section*{第二天}\ex 在数轴上取$m$条线段，
↪ 每条线段的两个端点都在整数集合$\{1,2,\cdots,2024\}$中，且任意两条线段的长度都不相等，
↪ 没有一条线段完全包含在另一条线段中，但两条线段之间可能部分重叠．求$m$的最大可能值．\vfill\ex
↪ 求所有函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意实数$x,y$，都有$f(x^2) - y f(y) = f(x+y)(f(x)-y)$．\vfill\ex
↪ 求所有整数$n$，使得$n^{7}-41$为完全平方数．\vfill
```