2023 年香港 IMO 代表队第一次选拔考试试题

2022-09-25 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_48991b7632cfb685

1. 为了参加数学竞赛，Mandy 需要早起. 从早上 5 点 30 分开始，她每 15 分钟在手机上设置一次闹钟. 如果她或她的母亲（或其他任何人）没有关闭闹钟，它会响一会儿，停一会儿，然后在 9 分钟后再次响起，依此类推（例如，如果第一个闹钟没有关闭，它会在早上 5 : 39 再次响起）. 每个闹钟也将独立工作. 现在假设每次铃声持续 x 分钟，并且在 Mandy 早上 6 : 30 醒来之前手机最终响了 50 分钟（假设在此之前没有人关闭任何闹钟）. 求 x 的值.

2. 设 n 为正整数. 求证：若素数 p 整除 $5^{4n}-5^{3n}+5^{2n}-5^n+1$，则 $p\equiv 1 \pmod 4$.

3. 点 P 在 $\triangle ABC$ 内部，且满足 $AP=15$，$BP=8$. 求 $\triangle ABP$ 和 $\triangle BCP$ 面积之和的最大值.

4. 实数 x，y，z 满足 $x+y+z\neq 0$. 求 $\dfrac{|x|+|x+4y|+|y+7z|+2|z|}{|x+y+z|}$ 的最小值.

5. $ABCD$ 为凸四边形，且满足 $AB=5$，$AD=17$，$CD=6$. 若 $\angle BAD$ 和 $\angle ADC$ 的角平分线交于 BC 的中点. 求 $ABCD$ 的面积.

6. (1) 在平面上作一些直线，使其恰好产生 2022 个交点，求直线数量的最小值.（注：产生 1 个交点，至少 2 条直线；产生 2 个交点，至少 3 条直线；产生 3 个交点，至少 4 条直线；产生 5 个交点，至少 4 条直线，以此类推.）
   (2) 要恰好产生 2022 个交点，结论如何?