一个三元不等式

2021-05-23　原文链接

题目 1 非负实数 a，b，c 满足 $a+b+c=6$，求 $\sum_{cyc}\sqrt{a^2+bc}$ 的最大值.

分析 1 首先当然是猜测取得最值的条件，代入几组特殊的 (a,b,c)，如 $(2,2,2)$、$(0,0,6)$、$(0,3,3)$，得到原式的值依次为 $6\sqrt{2}$、6、9. 可以发现 $(2,2,2)$ 并不是取得最值的条件.

进一步可以发现，$(a,b,c)=(0,3,3)$ 时，$\sqrt{a^2+bc}$、$\sqrt{b^2+ca}$、$\sqrt{c^2+ab}$ 的值均为 3. 于是大胆猜测，原式的最大值为 9，在 $(a,b,c)=(0,3,3)$ 时取得等号.

接下来利用条件进行齐次化，变为下题：

题目 2a，b，c 为非负实数，求证：

$$\sum_{cyc}\sqrt{a^2+bc}\le\frac{3}{2}(a+b+c).$$

分析 2 这个不等式实属不易，一直没有思路正向破解. 于是开始考虑取等条件 $(3,3,0)$，设法利用好这个 0，得到了下面的证法.

证明 由对称性不妨设 $a\ge b\ge c$.

于是

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}(a+b+c)\\=&\frac{a+(a+c)+(a+b)+(2b+2c)}{2}\\\ge&\sqrt{a(a+c)}+\sqrt{(a+b)(2b+2c)}\\=&\sqrt{a^2+ac}+\sqrt{2(b^2+ca+bc+ab)}\\\ge&\sqrt{a^2+ac}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{bc+ab}\\\ge&\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\end{aligned}$$

其中最后一步由 $a\ge b\ge c$ 得到了 $ac\ge bc$，$bc\ge c^2$.

证毕.

如果您有更好的方法，请联系作者，非常感谢.