2026 年东南数学奥林匹克高一组 P8 一个非常自然的构造方式

2026-07-31　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_48e96a88a61e2616

题目

设 a,b,c,d,e 为五个正整数，其中 $\gcd(a,b)=1$. 证明不定方程组

$$a+b=c+d+e,\qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}$$

有无穷多组解.

---

1. 改写两个方程

把 c,d 移到左边，原方程组等价于

$$e=(a-d)+(b-c),$$

以及

$$\frac{1}{e}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right).$$

因此，需要安排两组数 a,d 与 b,c，使它们的差和倒数差能够同时配合.

先考察符号. 若两个倒数差都为正，则 $a<d$、$b<c$，从而

$$(a-d)+(b-c)<0,$$

这与 $e>0$ 矛盾.

于是考虑一正一负的情形，取

$$a<d,\qquad b>c.$$

此时

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{d}>0,\qquad \frac{1}{b}-\frac{1}{c}<0,$$

而差 $a-d$ 与 $b-c$ 也恰好一负一正.

---

2. 先构造第一组 a,d

设 $x<y$，并让 a,d 含有同一个正整数因子 s：

$$a=xs,\qquad d=ys.$$

则

$\frac{1}{a}-\frac{1}{d}=\frac{1}{xs}-\frac{1}{ys}=\frac{y-x}{xys}$.

若取

$s=y-x,$

分子与公共因子约去，得到

$a=x(y-x), \qquad d=y(y-x),$

并且

$\frac{1}{a}-\frac{1}{d}=\frac{1}{xy}$.

与此同时，

$a-d=x(y-x)-y(y-x)=-(y-x)^2$.

---

3. 再构造第二组 b,c

第二个倒数差需要为负. 取 $z>x$，设

$c=xt, \qquad b=zt.$

则

$\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{zt}-\frac{1}{xt}=-\frac{z-x}{xzt}$.

取

$t=z-x,$

便得到

$c=x(z-x), \qquad b=z(z-x),$

以及

$\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=-\frac{1}{xz}$.

差为

$b-c=z(z-x)-x(z-x)=(z-x)^2$.

因此，对任意正整数

$x<y<z,$

可以先取

$$\boxed{\begin{aligned} a&=x(y-x),\\ d&=y(y-x),\\ c&=x(z-x),\\ b&=z(z-x). \end{aligned}}$$

---

4. 把两个原方程化成关于 x, y, z 的条件

倒数差之和为

$\frac{1}{e} = \frac{1}{xy} - \frac{1}{xz} = \frac{z-y}{xyz}$.

故

$e = \frac{xyz}{z-y}$.

另一方面,

$e = (a-d) + (b-c)$

$= -(y-x)^2 + (z-x)^2$

$= (z-y)(z+y-2x)$.

所以 x, y, z 需要满足

$\frac{xyz}{z-y} = (z-y)(z+y-2x)$,

即

$\boxed{xyz = (z-y)^2(z+y-2x).}$

---

5. 选取一个较容易处理的情况

记

$r = z - y > 0$.

上式变为

$xyz = r^2(z+y-2x)$.

先考察 $r \mid y$ 的情形. 写成

$y = nr$

其中 n 为正整数. 由于 $z - y = r$, 于是

$z = (n+1)r$.

代入条件

$xyz = (z-y)^2(z+y-2x)$,

得到

$x \cdot nr \cdot (n+1)r = r^2\big((2n+1)r - 2x\big)$.

约去 r^2, 可得

$n(n+1)x = (2n+1)r - 2x$,

即

$\boxed{(2n+1)r = (n^2+n+2)x.}$

6. 解出整数比例

令

$g = \gcd(2n+1, n^2+n+2).$

取这个比例的一组最简正整数解：

$$\boxed{x = \frac{2n+1}{g}, \qquad r = \frac{n^2+n+2}{g}.}$$

再记

$p = nr - x, \qquad q = (n+1)r - x.$

计算得

$p = \frac{n^3+n^2-1}{g},$

以及

$q = \frac{n^3+2n^2+n+1}{g}.$

当 $n \geq 1$ 时，

$x > 0, \qquad r > 0, \qquad p > 0, \qquad q > 0.$

此时

$y = nr, \qquad z = (n+1)r,$

且

$y - x = p, \qquad z - x = q.$

于是定义

$$\boxed{\begin{aligned} a &= xp, \\ b &= (n+1)rq, \\ c &= xq, \\ d &= nrp, \\ e &= n(n+1)xr. \end{aligned}}$$

7. 验证两个方程

首先，

$\frac{1}{a} - \frac{1}{d} = \frac{1}{xp} - \frac{1}{nrp} = \frac{nr-x}{xnrp} = \frac{1}{xnr},$

因为 $p = nr - x.$

同理，

$\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{(n+1)rq}-\frac{1}{xq}=-\frac{(n+1)r-x}{x(n+1)rq}=-\frac{1}{x(n+1)r}$,

因为 $q=(n+1)r-x$.

所以

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)&=\frac{1}{xnr}-\frac{1}{x(n+1)r}\\&=\frac{1}{n(n+1)xr}\\&=\frac{1}{e}.\end{aligned}$$

因此

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}$.

再验证和式. 由

$a-d=(x-nr)p=-p^2$

以及

$b-c=((n+1)r-x)q=q^2$,

得到

$$\begin{aligned}a+b-c-d&=q^2-p^2\\&=(q-p)(q+p).\end{aligned}$$

而

$q-p=r$,

且

$q+p=(2n+1)r-2x$.

因此

$a+b-c-d=r\big((2n+1)r-2x\big)$.

由

$(2n+1)r=(n^2+n+2)x$

可得

$(2n+1)r-2x=n(n+1)x$.

故

$a+b-c-d=n(n+1)xr=e$,

即

$a+b=c+d+e$.

8. 写出参数公式

将 x, r, p, q 代入，可得

$$
\boxed{\begin{aligned}
a &= \frac{(2n+1)(n^3+n^2-1)}{g^2},\\
b &= \frac{(n+1)(n^2+n+2)(n^3+2n^2+n+1)}{g^2},\\
c &= \frac{(2n+1)(n^3+2n^2+n+1)}{g^2},\\
d &= \frac{n(n^2+n+2)(n^3+n^2-1)}{g^2},\\
e &= \frac{n(n+1)(2n+1)(n^2+n+2)}{g^2},
\end{aligned}}
$$

其中

$g = \gcd(2n+1, n^2+n+2).$

---

9. 验证 $\gcd(a,b)=1$

由 x, r 是最简比例，得到

$\gcd(x, r) = 1.$

若正整数 $t \mid x$ 且 $t \mid n+1$，则

$t \mid 2n+1, \qquad t \mid 2(n+1).$

因此

$t \mid 2(n+1) - (2n+1) = 1,$

故

$\gcd(x, n+1) = 1.$

若 $t \mid p$ 且 $t \mid n+1$，则

$t \mid gp = n^3+n^2-1 = n^2(n+1) - 1.$

所以 $t \mid 1$，从而

$\gcd(p, n+1) = 1.$

再由

$p = nr - x, \qquad q = (n+1)r - x, \qquad q - p = r$

可得

$\gcd(x, q) = \gcd\big(x, (n+1)r\big) = 1, \gcd(p, r) = \gcd(x, r) = 1,$

以及

$\gcd(p,q)=\gcd(p,r)=1.$

因此 x,p 中的任一数都与 $n+1,r,q$ 中的任一数互素．于是

$\gcd(a,b)=\gcd\big(xp,(n+1)rq\big)=1.$

---

10. 验证所得解有无穷多组

因为

$4(n^2+n+2)-(2n+1)^2=7,$

所以

$g\mid 7.$

特别地，

$g\le 7.$

因此

$a=\frac{(2n+1)(n^3+n^2-1)}{g^2}\ge\frac{(2n+1)(n^3+n^2-1)}{49}\longrightarrow\infty\qquad(n\to\infty).$

所以随 n 变化，所得五元组中有无穷多组互不相同．原方程组有无穷多组正整数解.

---

11. 一个具体例子

取 $n=1$，则

$g=\gcd(3,4)=1,\qquad x=3,\qquad r=4,$

并且

$p=1,\qquad q=5.$

于是

$(a,b,c,d,e)=(3,40,15,4,24).$

直接验证：

$3+40=15+4+24,\frac{1}{3}+\frac{1}{40}=\frac{1}{15}+\frac{1}{4}+\frac{1}{24},$

并且

$\gcd(3,40)=1.$

因此这确实是题目所要求的一组解.