Mathematical Reflections 2022 年第一期征解题

2022-01-17 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4909f6b961fb65ee

Junior Problems

J577. 正实数 a，b 满足 $a+b=1$. 求证:

$$\left(\frac{1}{a^2}-b-1\right)\left(\frac{1}{b^2}-a-1\right)\geq\frac{25}{4}$$

J578. 设 a 为正实数，$f(x)=a^x+\dfrac{1}{a^x}$. 已知 $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=1+2\sqrt{2}$，求 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ 的值.

J579. 求所有整数对 (x,y) 满足

$$3x^2+10x+5=9\cdot 2^y$$

J580. 求方程的实数解:

$$\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x^3-4}$$

J581. 实数 a，b，c，d 满足

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd-abcd=11$$

求证:

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\left(d^2+1\right)\geq 100$$

J582. 四边形 $ABCD$ 内接于圆 Γ，圆心为 O. 直线 AC 和 BD 相交于点 X，Γ_1 为 $\triangle XAB$ 的外接圆. 直线 AD 再次交 Γ_1 于点 N，直线 BC 再次交 Γ_1 于点 M. 已知凸六边形 $ONDXCM$ 的面积为 $DC\cdot AB$. 求 $\angle AXB$.

Senior Problems

S577. 整数 k，m，n 满足 $k+m+n=1$. 求证:

$$\left(k^2+m^2+n^2+7\right)^2+(kmn-4)^2$$

不为奇数的平方.

S578. 正实数 a，b，c 满足 $ab+bc+ca=1$. 求证:

$$\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{1+b^2+c^2}+\frac{1}{1+c^2+a^2}\leq\frac{9}{5}$$

S579. 以 a，b，c 为三边的三角形面积为 S. 正实数 α，β，γ 满足

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\gamma+1}=2$$

求证:

$$\alpha b^2c^2+\beta c^2a^2+\gamma a^2b^2\geq 8S^2$$

S580. 求证：不存在正整数 a，b，c 满足

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-3abc=2022$$

S581. 素数 p 满足 $p\equiv 1\pmod 4$. 求证：存在正整数 a 满足

$$a^2+2^a\equiv 0\pmod{2p}$$

S582. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=1$，$a_2=2$，且对于任意 $n\geq 1$，都有

$$a_{n+2}=(n+2)a_{n+1}-na_n+2n+1$$

求所有正整数 n，使得存在 $m\in\mathbb{N}$，满足 $a_n=m!$.

Undergraduate Problems

U577. 对正整数 n，计算

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{4n^2+3n+2}\right\}$$

其中 $\{a\}$ 表示 a 的小数部分.

U578. 计算:

$$\iint_D\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}e^{\sqrt{x^2+y^2}/2}dxdy$$

其中 $D=\left\{(x-1)^2+y^2\leq 1,y\geq 0\right\}$.

U579. 设 x_0 为整数，$P(x)$ 为整系数多项式. 数列 $\{x_n\}$ 定义如下：对任意 $n\geq 1$，$x_n=x_{n-1}^n+P(n)$. 求证：对任意正整数 $m\geq 2$，存在正整数 T，使得

$$x_{n+T}\equiv x_n\pmod m$$

对任意足够大的 n 恒成立.

U580. 已知两个半径为 1 且相切的圆，和它们的一条外公切线．左边的圆为白色的，右边的圆为灰色的．第三个较小的圆与较大的两个圆、公切线同时相切，且也是灰色的．按照如下规则插入无穷多个灰色圆：后续的每个圆和它前一个圆、最大的灰色圆、白色圆均相切．求灰色圆覆盖的总面积．

U581. 正实数 $r > s$，且 r 和 s 互素．互异的非常数复系数多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 满足

$$P(x)^r - P(x)^s = Q(x)^r - Q(x)^s$$

求证：$r = 2$，$s = 1$.

U582. 设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为二阶可微函数，$u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足 $u(x) = f(\|x\|)$．记 $\nabla^2(u)$ 为 u 的 Hessian 矩阵，用 f 表示 $\det\left(\nabla^2(u)\right)$.

Olympiad Problems

O577. 正实数 a，b，c，d 满足

$$abc + abd + acd + bcd = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

且不存在其中两个数小于 1，另两个数大于 1 的情况．求证：

$$a + b + c + d - abcd \geq \frac{15}{16}$$

O578. 求方程的正整数解：

$$\frac{x^3 + y^3}{6} = 2022\sqrt{xy - 4}$$

O579. 正实数 a，b，c 满足 $a + b + c = 3$．求证：

$$(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) + \frac{48}{ab + bc + ca} \geq 17$$

O580. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{R}{r} + \frac{r}{R} + \frac{3}{2} \geq \frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{2abc}$$

O581. 设 $\triangle ABC$ 为不等边的非直角三角形．三条高分别为 AD，BE，CF，三边中点分别为 M_a，M_b，M_c．G 为 $\triangle ABC$ 的重心，N 为 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心．EF 和 M_bM_c 交于点 P，PG 和 BC 交于点 Q．已知 AN 和 EF 平行，求证：OQ 平行于 $\triangle DEF$ 的欧拉线．

O582. P 为 $\triangle ABC$ 内部一点，Q 为 P 关于 $\triangle ABC$ 的等角共轭点．M 和 N 分别为 P 和 Q 在 BC 上的投影．P' 和 Q' 分别为 AP 和 AQ 与 $\triangle ABC$ 外接圆的另一个交点．求证：MP' 和 NQ' 交于直线 PQ 上．

最后打个广告: