来自菲尔兹奖得主邓煜的一道不等式：2023 年 CTST P11 的期望证法

2026-07-22　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4971193a8d613b52

题目：（2023 年 CTST P11，邓煜）

设 n 是正整数，且 $a_{ijk} \in \{-1,1\}(1 \le i,j,k \le n)$. 求证：存在 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_n \in \{-1,1\}$，使得

$\left|\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ijk}x_iy_jz_k\right| > \frac{n^2}{3}$.

我们先证明一个二维情形的引理：

> 任取 $b_{ij} \in \{-1,1\}$ $(1 \le i,j \le n)$. 设 $X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n$ 是相互独立且等概率取 ± 1 的随机变量，并令 $S = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}X_iY_j$. 则
>
> $\mathbb{E}|S| \ge \frac{n^2}{3n-2} > \frac{n}{3}$.

引理的证明：

由于所有随机变量相互独立，且均值为 0，展开 S^2 后，只有平方项的期望非零. 因此

$\mathbb{E}S^2 = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 = n^2$.

固定 $X_1,\cdots,X_n$，并记

$c_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}X_i, \qquad Q = \sum_{j=1}^{n} c_j^2$.

此时 $S = \sum_{j=1}^{n} c_jY_j$. 对 $Y_1,\cdots,Y_n$ 取条件期望，由于只有每个 Y_j 均出现偶数次的项可能有非零期望，故

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_Y\left(S^4 \mid X_1,\cdots,X_n\right)\\ =&\sum_{j=1}^{n} c_j^4 + 6\sum_{1\le j<\ell\le n} c_j^2c_\ell^2\\ =&3Q^2 - 2\sum_{j=1}^{n} c_j^4. \qquad (1)\end{aligned}$$

对每个固定的 j，随机变量 $c_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}X_i$ 是 n 个相互独立的随机符号之和. 展开 c_j^4 后，非零期望项只有两类：

- 四个指标全相同；
- 两个不同指标各出现两次.

于是

$\mathbb{E}_X c_j^4 = n + 6\binom{n}{2} = 3n^2 - 2n.$

另一方面，对 $1 \le i < p \le n$，定义 $r_{ip} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}b_{pj}$. 由 $b_{ij}^2 = 1$，有

$Q = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}X_i\right)^2 = n^2 + 2\sum_{1\le i<p\le n} r_{ip}X_iX_p.$

若无序对 $\{i,p\} \neq \{u,v\}$，则 $\mathbb{E}_X(X_iX_pX_uX_v) = 0$；除此之外，$\mathbb{E}_X(X_iX_p) = 0.$

因此，将上式平方并取期望可得

$\mathbb{E}_X Q^2 = n^4 + 4\sum_{1\le i<p\le n} r_{ip}^2.$

由于每个 r_{ip} 是 n 个 ± 1 之和，故 $|r_{ip}| \le n$，从而

$\mathbb{E}_X Q^2 \le n^4 + 4\binom{n}{2}n^2 = 3n^4 - 2n^3.$

对 (1) 再关于 $X_1, \cdots, X_n$ 取期望，得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}S^4 &= 3\mathbb{E}_X Q^2 - 2\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}_X c_j^4 \\ &\le 3(3n^4 - 2n^3) - 2n(3n^2 - 2n) \\ &= n^2(3n-2)^2.\end{aligned}$$

最后，由 Hölder 不等式，

$\mathbb{E}S^2 = \mathbb{E}\left(|S|^{2/3}|S|^{4/3}\right) \le (\mathbb{E}|S|)^{2/3}(\mathbb{E}S^4)^{1/3}.$

可得

$\mathbb{E}|S| \ge \frac{(\mathbb{E}S^2)^{3/2}}{(\mathbb{E}S^4)^{1/2}} \ge \frac{n^3}{n(3n-2)} = \frac{n^2}{3n-2} > \frac{n}{3}.$

引理得证.

回到原题.

仍取相互独立且等概率取 ± 1 的随机变量 $X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n$，并对每个 $k \in \{1, \cdots, n\}$，定义

$S_k = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijk}X_iY_j.$

对每个固定的 k，将引理应用于 $(a_{ijk})_{1\le i,j\le n}$，得到

$\mathbb{E}|S_k| \ge \frac{n^2}{3n-2}.$

故由期望的线性性，

$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}|S_k|\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|S_k| \ge \frac{n^3}{3n-2} > \frac{n^2}{3}.$

因此，存在一组确定的

$x_1, \cdots, x_n,\ y_1, \cdots, y_n \in \{-1, 1\},$

使得令 $T_k = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijk}x_iy_j$ 时，有

$\sum_{k=1}^{n}|T_k| > \frac{n^2}{3}.$

最后，对每个 k，取

$$z_k = \begin{cases} 1, & T_k \geq 0, \\ -1, & T_k < 0. \end{cases}$$

于是 $z_k T_k = |T_k|$，从而

$\left|\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ijk} x_i y_j z_k\right| = |\sum_{k=1}^{n} z_k T_k| = \sum_{k=1}^{n} |T_k| > \frac{n^2}{3}$.

命题得证.