2023 年中国台湾 IMOC 代数组

2023-09-17　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_49e911c844b182a9

每年，我国台湾的前 IMO 参赛者组成的小团体都会举办一个夏令营，讲解知识和技巧，还有 8 次模拟考试。从 2017 年开始，他们取消了模拟考试，用若干练习题来取代。下面就是 2023 年夏令营的 IMOC 练习题。

其余模块的题目接下来几天会陆续更新。

2023 年中国台湾 IMOC

程国根　译

代数组

1. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意正整数 n，都存在唯一的正整数 k，使得 $f^{(k)}(n)\le n+k+1$.

2. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有

$$f(f(x)+y)(x-f(y))=f(x)^2-f(y^2).$$

3. 正实数 x,y,z 满足 $x+y+z=3$. 求证：

$$\sum_{cyc}\left(x^2+y^2+x^2y^2+\frac{y^2}{x^2}\right)\ge 4\sum_{cyc}\frac{y}{x}.$$

4. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}^+$，都有

$$xf(1+xf(y))=f(f(x)+f(y)).$$

5. 对实数 x 进行以下操作：选取一个正整数 n 及倒数和为 1 的 n 个正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. 令 $x_0=x$，$x_k=\sqrt{x_{k-1}a_k}$ $(1\le k\le n)$，$y=x_n$. 称正实数 M 是**极大的**，若对任意 $x\in\mathbb{R}^+$，总能选取恰当的 $n,a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得 y 小于 M. 求所有**极大的**正实数.

6. 定义

$$f(x,y,z)=|xy|\sqrt{x^2+y^2}+|yz|\sqrt{y^2+z^2}+|zx|\sqrt{z^2+x^2}.$$

求最佳的常数 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$，使得对任意满足 $x+y+z=0$ 的实数 x,y,z，都有

$$c_1(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\le f(x,y,z)\le c_1(x^2+y^2+z^2)^{3/2}.$$

1

2023 年中国台湾 IMOC

程国根　译

代数组

1. 求所有函数 f：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意正整数 n，都存在唯一的正整数 k，使得 $f^{(k)}(n)\le n+k+1$.

2. 求所有函数 f：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $$f(f(x)+y)(x-f(y)) = f(x)^2-f(y^2).$$

3. 正实数 x,y,z满足 $x+y+z=3$. 求证：$$\sum_{cyc}\left(x^2+y^2+x^2y^2+\frac{y^2}{x^2}\right)\geq 4\sum_{cyc}\frac{y}{x}.$$

4. 求所有函数 f：$\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}^{+}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}^{+}$，都有 $$xf(1+xf(y))=f(f(x)+f(y)).$$

5. 对实数 x进行以下操作：选取一个正整数 n及倒数和为 1的 n个正实数 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$. 令 $x_{0}=x$，$x_{k}=\sqrt{x_{k-1}a_{k}}$（$1\le k\le n$），$y=x_{n}$. 称正实数 M是**极大的**，若对任意 $x\in\mathbb{R}^{+}$，总能选取恰当的 $n,a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$，使得 y小于 M. 求所有**极大的**正实数.

6. 定义 $$f(x,y,z)=| xy|\sqrt{x^2+y^2}+| yz|\sqrt{y^2+z^2}+| zx|\sqrt{z^2+x^2}.$$求最佳的常数 $c_{1},c_{2}\in\mathbb{R}$，使得对任意满足 $x+y+z=0$的实数 x,y,z，都有 $$c_1(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\leq f(x,y,z)\leq c_1(x^2+y^2+z^2)^{3/2}.$$

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2023年中国台湾IMOC}\flushright 程国根\quad 译\section*{代数组}\ex 求所有函数$f$：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，
↪ 使得对任意正整数$n$，都存在唯一的正整数$k$，使得$f^{(k)}(n)\le n+k+1$. \vfill\ex 求所有函数$f$：
↪ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意$x,y\in\mathbb{R}$，都有$$f(f(x)+y)(x-f(y)) = f(x)^2-f(y^2).$$\vfill\ex
↪ 正实数$x,y,z$满足$x+y+z=3$. 求证：$$\sum_{cyc}\left( x^2+y^2+x^2y^2+\frac{y^2}{x^2}\right)\geq
↪ 4\sum_{cyc}\frac{y}{x}.$$\vfill\ex 求所有函数$f$：$\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}^{+}$，使得对任意$x,y\in\mathbb{R}^{+}$，
↪ 都有$$xf(1+xf(y))=f(f(x)+f(y)).$$\vfill\ex 对实数$x$进行以下操作：
↪ 选取一个正整数$n$及倒数和为$1$的$n$个正实数$a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$. 令$x_{0}=x$，$x_{k}=\sqrt{x_{k-1}a_{k}}$
↪ （$1\le k\le n$），$y=x_{n}$. 称正实数$M$是\textbf{极大的}，若对任意$x\in\mathbb{R}^{+}$，
↪ 总能选取恰当的$n,a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$，使得$y$小于$M$. 求所有\textbf{极大的}正实数. \vfill\ex
↪ 定义$$f(x,y,z)=|xy|\sqrt{x^2+y^2}+|yz|\sqrt{y^2+z^2}+|zx|\sqrt{z^2+x^2}.$$求最佳的常数$c_{1},c_{2}\in\mathbb{R}$，
↪ 使得对任意满足$x+y+z=0$的实数$x,y,z$，都有$$c_1(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\leq f(x,y,z)\leq c_1(x^2+y^2+z^2)^{3/2}.$$\vfill
```