北京大学 2022 年寒假学堂数学试题（理科）

2022-01-25　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4b56f8a3352e6233

一共 20 道单项选择题，时间为 1 小时。

1. 已知 $A=\{(x,y)\mid x+y+1\geq\sqrt{2(x^2+y^2)}\}$，$B=\{(x,y)\mid |x-a|+|y-1|\leq 1\}$，$A\cap B=\varnothing$，则 a 的取值范围为 ( ).

2. $a^2+b^2+c^2=1$，$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{c}{b}$，$\dfrac{a}{c}\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，使 $ab+2bc$ 取得最大值的 (a,b,c) 的组数为 ( ).

3. 复数 z 满足 $|z|\leq 2$，$\left|\dfrac{z^2+z+1}{z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right|$ 的最大值为 ( ).

4. 凸四边形 $ABCD$，AC 交 BD 于点 E，$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle DEC}=1$．$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ 的最小值为 ( ).

5. 在 $\triangle ABC$ 中，M 为 BC 中点，$AB=3$，$AM=1$，$\cos\angle BAC$ 的最大值为 ( ).

6. M，N 分别为 $\triangle ABC$ 中 AB，AC 上的点，且满足 $AM=\lambda MB$，$AN=\mu NC$，已知 $\mu+\lambda=\mu\lambda$，则 MN 恒过 $\triangle ABC$ 的 ( ).（填五心）

7. 在各数位皆由 $\{1,2,3\}$ 中元素构成的不超过 10^8 的数中，能被 3 整除的数的个数为 ( ).

8. $(x^2+[x]+1)^2+[x^2+[x]+1]=x-1$ 的解的个数为 ( ).（其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[-3.5]=-4$，$[2.5]=2$）

9. $a_i\in\mathbb{N}^+$，$\sum\limits_{i=1}^{50}a_i=110$，$\left(\sum\limits_{i=1}^{50}a_i^2\right)_{\max}+\left(\sum\limits_{i=1}^{50}a_i^2\right)_{\min}=$( ).

10. 下列选项中不是函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|+2\sin 2x$ 的对称轴的是 ( ).
A.$\dfrac{\pi}{4}$B.$\dfrac{\pi}{2}$C.$\dfrac{3}{4}\pi$D. 其余选项都不正确

11. a_1，a_2，a_3，a_4，b_1，b_2，b_3，b_4 满足 $(a_1+b_i)(a_2+b_i)(a_3+b_i)(a_4+b_i)=1$ 对 $i=1,2,3,4$ 成立 $(b_i\neq 0)$．记 $m_i=(a_i+b_1)(a_i+b_2)(a_i+b_3)(a_i+b_4)$ 则 $m_1=m_2=m_3=m_4=$( ).

12. $x_i(1\leq i\leq 8)$ 的和为 8，其中最大的数不超过最小的数的 3 倍，则 $\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2$ 的最大值为 ( ).

13. $$\begin{cases}xy+z=20\\x+yz=35\end{cases}$$
的正整数解 (x,y,z) 的组数为 ( ).

14. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=1$，$CD=\sqrt{3}$，AB 与 CD 所在的直线间的距离为 2，且 AB 与 CD 所成角为 60°，则 $ABCD$ 的体积为 ( ).

15. 实系数四次方程 $f(x)=0$ 的解成等差数列. 则实系数方程 $f'(x)=0$ 的最大解和最小解之差为 ( ).

16. 点 $(m,-m)$ 到 $xy=1$ 上的点的距离不超过 $4(m>0)$，则 m 的最小值为 ( ).

17. 对任意的实数 a，b，存在 $x\in[0,3\pi]$ 使得 $f(x)=|\sin x+\cos x+ax+b|\geq c$，则 c 的最大值为 ( ).

18. $x+2y+3z=1$，则 $\sqrt{x^2+2z^2}+\sqrt{2y^2+z^2}$ 的最小值为 ( ).

19. 空间中有 2022 个点，任意两点连线的中点总数的最小值为 ( ).

20. $2^s+2^t+2^m(0\leq s<t<m$，s，t，m 为整数) 组成的数由小到大排列构成数列 $\{a_n\}$，则 $a_{50}=$( ).