2022 年罗马尼亚数学奥林匹克（区域级）

2022-03-28　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4b5fc5e968a309e9

九年级组

1. 函数 $f\colon \mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ 满足对于任意 x，$y\in\mathbb{N}^*$，都有
$$\frac{x^3+3x^2f(y)}{x+f(y)}+\frac{y^3+3y^2f(x)}{y+f(x)}=\frac{(x+y)^3}{f(x+y)}.$$
(1) 求证：$f(1)=1$.
(2) 求函数 f.

2. (1) 求证：对于任意 $x\geq 0$，都有 $2x^3-3x^2+1\geq 0$.
(2) 设 x，y，$z\geq 0$，满足 $\dfrac{2}{1+x^3}+\dfrac{2}{1+y^3}+\dfrac{2}{1+z^3}=3$. 求证：
$$\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1-y}{1-y+y^2}+\frac{1-z}{1-z+z^2}\geq 0.$$

3. (1) 求方程 $3^x=x+2$ 的正整数解.
(2) 求二元自然数组 (x,y)，使得 $x+3^y$ 和 $y+3^x$ 为相邻整数.

4. 称平面上的六点组成的集合“可拆分的”，如果能将其分别记为 A，B，C，D，E，F，且 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 有相同的重心.
(1) 构造一个可拆分的点集.
(2) 证明：任意 7 点构成的集合总存在一个不可拆分的六元子集.

十年级组

1. 求所有 $x\in\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$，满足
$$\log_x(1-x)+\log_2\frac{1-x}{x}=\frac{1}{(\log_2 x)^2}.$$

2. 复数 z_1，z_2，z_3 的模长均为 1，且对于任意 $i\neq j\in\{1,2,3\}$，都有 $|z_i-z_j|\geq\sqrt{2}$. 求证：
$$|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3+z_1|\leq 3.$$

3. 称一个正整数 $n\geq 4$“有趣的”，如果存在模长为 1 的复数 z，满足
$$1+z+z^2+z^{n-1}+z^n=0.$$
问：有多少个小于 2022 的有趣的数?

4. 求所有函数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，满足对任意 x，$y\in\mathbb{R}$，都有
$$f(f(y-x)-xf(y))+f(x)=y\cdot(1-f(x)).$$

十一年级组

1. 函数 f，g：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任意 $a\in\mathbb{R}$，都有
$$\inf_{x>a} f(x)=g(a)\text{且}\sup_{x<a} g(x)=f(a),$$
给定满足达布条件 (中值定理条件) 的函数 f，求证：f 和 g 均连续，且两者相等.

2. A 和 B 均为 3 阶实矩阵，且 $A^2+B^2=O_3$. 求证：对任意实数 a 和 b，$\det(aA+bB)=0$.

3. 数列 $\{x_n\}$ 定义如下：$x_1=1$，对于任意 $n\geq 1$，$x_{n+1}=\dfrac{x_1}{n+1}+\dfrac{x_2}{n+2}+\cdots+\dfrac{x_n}{2n}$. 数列 $\{y_n\}$ 满足对于任意 $n\geq 1$，$y_n=\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}$. 求证：
(1) 对于任意 $n\geq 1$，$x_{n+1}^2<\dfrac{y_n}{2}$，且 $y_{n+1}<\dfrac{2n+1}{2n+2}y_n$.
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

4. 整数 $n\geq 2$，A 为 n 阶复矩阵. 求证：若 $m=|\{\mathrm{rank}(A^k)-\mathrm{rank}(A^{k+1})\mid k\in\mathbb{N}^*\}|$，则 $n+1\geq\dfrac{m(m+1)}{2}$.

十二年级组

1. 设 e 为半群 $(M,\cdot)$ 的幺元，且 $a\in M$ 为一个可逆元. 求证：
(1) 集合 $M_a:=\{x\in M\mid ax^2a=e\}$ 非空.
(2) 若 $b\in M_a$ 可逆，则 $b^{-1}\in M_a$ 当且仅当 $a^4=e$.
(3) 若 $(M_a,\cdot)$ 为半群，则对任意 $x\in M_a$，都有 $x^2=e$.

2. 设 $(G,\cdot)$ 为一个群，$H\neq G$ 为一个子群，满足对任意 x，$y\in G\setminus H$，都有 $x^2=y^2$. 求证：$(H,\cdot)$ 为阿贝尔群.

3. 求所有 $n\in\mathbb{N}^*$，满足
$$I_n:=\int_0^{\pi}\cos(x)\cdot\cos(2x)\cdot\ldots\cdot\cos(nx)\,dx=0.$$

4. 开区间 $I\subset\mathbb{R}$，f：$I\to\mathbb{R}$ 为一个严格单调函数. 求证：对于任意 $c\in I$，存在 a，$b\in I$，使得 $c\in(a,b)$，且
$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)\cdot(b-a).$$