数学竞赛每日一练第 20 期解答

2021-06-24 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4b87e54158e5d506

非零实数 a，b，c 满足

$$\{a+b,b+c,c+a\}=\{ab,bc,ca\}.$$

求证:

$$\{a,b,c\}=\{a^2-2,b^2-2,c^2-2\}.$$

解答（PDF 中已展开）

证明设

$$\begin{aligned}f(x)=&(x-a)(x-b)(x-c)\\=&x^3-px^2+qx-r\end{aligned}$$

于是有 $a+b+c=p$，$ab+bc+ca=q$，$abc=r$.

由

$$\{a+b,b+c,c+a\}=\{ab,bc,ca\}$$

有

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)=ab+bc+ca$$

即 $2p=q$.

$$\begin{aligned}&(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)\\=&(ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)\end{aligned}$$

即

$$(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)=abc(a+b+c)$$

也即 $p^2+q=pr$，结合 $q=2p$ 知

$$p(p-r+2)=0$$

故 $p=0$ 或 $p=r-2$.

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(ab)(bc)(ca)$$

即

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=(abc)^2$$

也即 $pq-r=r^2$，结合 $q=2p$ 知

$$2p^2=r^2+r$$

若 $p=0$，则 $q=0$，$r^2+r=0$，故 $r=0$ 或 $r=-1$. 因此 $f(x)=x^3$ 或 $f(x)=x^3+1$，均不含三个不相等的实根，矛盾！因此 $p=r-2$.

于是 $2(r-2)^2=r^2+r$ 即 $r^2-9r+8=0$. 于是 $r=1$ 或 $r=8$.

$r=8$ 时，$p=6$，$q=12$，此时

$$f(x)=x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$$

其不含三个不相等的实根，矛盾！

$r=1$ 时，$p=-1$，$q=-2$，此时

$$f(x)=x^3+x^2-2x-1$$

容易验证其有三个不相等的非零实根，且任意两根之和不为 0.

下面证明：

$$f(a^2-2)=f(b^2-2)=f(c^2-2)=0$$

注意到：

$$\begin{aligned}f(x^2-2)=&(x^2-2)^3+(x^2-2)^2-2(x^2-2)-1\\=&x^6-5x^4+6x^2-1\\=&(x^3-2x)^2-(x^2-1)^2\\=&(x^3+x^2-2x-1)(x^3-x^2-2x+1)\\=&f(x)(x^3-x^2-2x+1)\end{aligned}$$

由

$$f(a)=f(b)=f(c)=0$$

即得

$$f(a^2-2)=f(b^2-2)=f(c^2-2)=0$$

于是 a^2-2，b^2-2，c^2-2 也为 $f(x)$ 的根，且互不相等.

因此

$$\{a,b,c\}=\{a^2-2,b^2-2,c^2-2\}.$$