2022 年美国初中圣诞数学奥林匹克

2022-03-23　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4d5152f0f8bb2d4c

这是 aops 上圣诞节讨论组举办的一系列比赛之一，CIME 是 AIME 的模拟赛，CAMO 是 USAMO 的模拟赛，CJMO 是 USAJMO 的模拟赛.

CAMO 试题见昨天的文章：2022 年美国第三届圣诞数学奥林匹克——中文翻译

第一天

1. 记 $\lceil x \rceil$ 为不小于 x 的最小整数. 是否存在两个相异实数 a 和 b，同时满足以下三个条件：

- a 和 b 均大于 1；
- a 和 b 均不为整数；
- 对任意正整数 n，$\lceil a^n \rceil \cdot \lceil b^n \rceil$ 均为完全平方数.

1. **（同 CAMO 第 1 题）**锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，M 为 BC 的中点，D 为 A 在 BC 上的垂足. 点 P 满足凸四边形 $HMPD$ 为平行四边形，以 P 为圆心，且过点 B、C 的圆和 AB 再次交于点 X，和 AC 再次交于点 Y. 求证：D、X、Y 三点共线.

2. 正整数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 满足：能将正整数集划分为无穷多个互不相交的集合，每个集合均为 $\{a_1k, a_2k, \cdots, a_nk\}$ 的形式，其中 k 为正整数. 求证：能将正有理数集划分为无穷多个互不相交的集合，每个集合均为 $\{a_1k, a_2k, \cdots, a_nk\}$ 的形式，其中 k 为正有理数.

第二天

1. 设 m 和 n 为正整数，$m \geq 2$. 对两个相异整数 x 和 y，记 $D(x, y)$ 为满足 $m^d \mid x - y$，但 $m^{d+1} \nmid x - y$ 的唯一整数 d. 给定整数集 S，若对 S 中的两个相异元素的所有组合，$D(x, y)$ 至多有 n 个不同的取值，S 中的元素至多有多少个？

2. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对于任意实数 x 和 y，都有

$$f(f(xy) + y) = (x + 1)f(y).$$

3. **（同 CAMO 第 5 题）**证明或否定如下命题：对任意正整数 k，都有

$$\gcd((2k-1)^{2k-1} + (2k+1)^{2k+1}, (2k-1)^{2k+1} + (2k+1)^{2k-1}) = 4k^2.$$