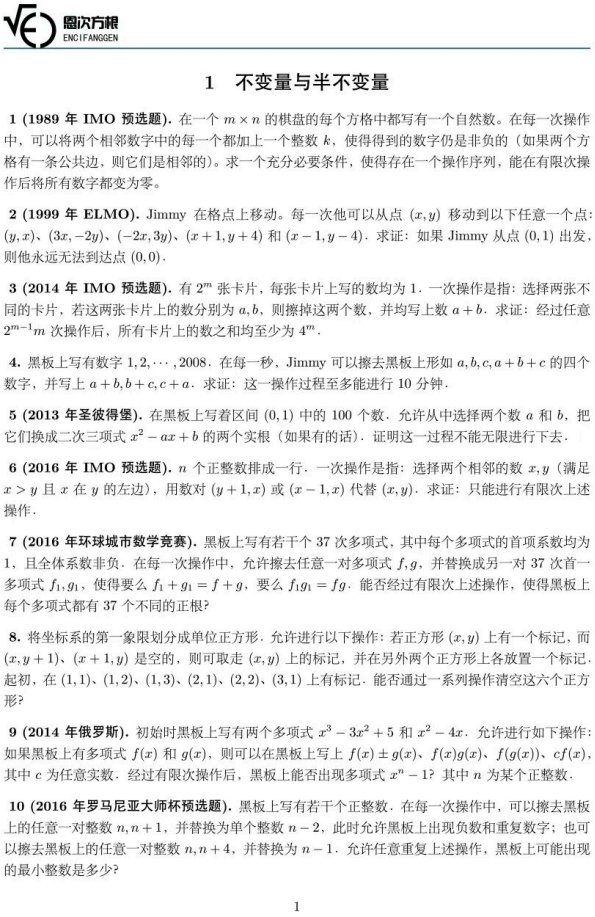
不变量与半不变量讲义

2025-01-13　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4da10e4707c74839



恩次方根
ENCIFANGGEN

1　不变量与半不变量

1 (1989 年 IMO 预选题). 在一个 $m \times n$ 的棋盘的每个方格中都写有一个自然数。在每一次操作中，可以将两个相邻数字中的每一个都加上一个整数 k，使得得到的数字仍是非负的（如果两个方格有一条公共边，则它们是相邻的）。求一个充分必要条件，使得存在一个操作序列，能在有限次操作后将所有数字都变为零。

2 (1999 年 ELMO). Jimmy 在格点上移动。每一次他可以从点 (x, y) 移动到以下任意一个点：(y, x)、$(3x, -2y)$、$(-2x, 3y)$、$(x+1, y+4)$ 和 $(x-1, y-4)$. 求证：如果 Jimmy 从点 $(0, 1)$ 出发，则他永远无法到达点 $(0, 0)$.

3 (2014 年 IMO 预选题). 有 2^m 张卡片，每张卡片上写的数均为 1. 一次操作是指：选择两张不同的卡片，若这两张卡片上的数分别为 a, b，则擦掉这两个数，并均写上数 $a+b$. 求证：经过任意 $2^{m-1}m$ 次操作后，所有卡片上的数之和均至少为 4^m.

4. 黑板上写有数字 $1, 2, \cdots, 2008$. 在每一秒，Jimmy 可以擦去黑板上形如 $a, b, c, a+b+c$ 的四个数字，并写上 $a+b, b+c, c+a$. 求证：这一操作过程至多能进行 10 分钟.

5 (2013 年圣彼得堡). 在黑板上写着区间 $(0, 1)$ 中的 100 个数. 允许从中选择两个数 a 和 b，把它们换成二次三项式 $x^2 - ax + b$ 的两个实根（如果有的话）. 证明这一过程不能无限进行下去.

6 (2016 年 IMO 预选题). n 个正整数排成一行. 一次操作是指：选择两个相邻的数 x, y（满足 $x > y$ 且 x 在 y 的左边），用数对 $(y+1, x)$ 或 $(x-1, x)$ 代替 (x, y). 求证：只能进行有限次上述操作.

7 (2016 年环球城市数学竞赛). 黑板上写有若干个 37 次多项式，其中每个多项式的首项系数均为 1，且全体系数非负. 在每一次操作中，允许擦去任意一对多项式 f, g，并替换成另一对 37 次首一多项式 f_1, g_1，使得要么 $f_1 + g_1 = f + g$，要么 $f_1 g_1 = fg$. 能否经过有限次上述操作，使得黑板上每个多项式都有 37 个不同的正根?

8. 将坐标系的第一象限划分成单位正方形. 允许进行以下操作：若正方形 (x, y) 上有一个标记，而 $(x, y+1)$、$(x+1, y)$ 是空的，则可取走 (x, y) 上的标记，并在另外两个正方形上各放置一个标记. 起初，在 $(1, 1)$、$(1, 2)$、$(1, 3)$、$(2, 1)$、$(2, 2)$、$(3, 1)$ 上有标记. 能否通过一系列操作清空这六个正方形?

9 (2014 年俄罗斯). 初始时黑板上写有两个多项式 $x^3 - 3x^2 + 5$ 和 $x^2 - 4x$. 允许进行如下操作：如果黑板上有多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$，则可以在黑板上写上 $f(x) \pm g(x)$、$f(x)g(x)$、$f(g(x))$、$cf(x)$，其中 c 为任意实数. 经过有限次操作后，黑板上能否出现多项式 $x^n - 1$? 其中 n 为某个正整数.

10 (2016 年罗马尼亚大师杯预选题). 黑板上写有若干个正整数. 在每一次操作中，可以擦去黑板上的任意一对整数 $n, n+1$，并替换为单个整数 $n-2$，此时允许黑板上出现负数和重复数字；也可以擦去黑板上的任意一对整数 $n, n+4$，并替换为 $n-1$. 允许任意重复上述操作，黑板上可能出现的最小整数是多少?

1

不变量的题目特点是每道题都有比较简洁的方法，但需要一些特别的想法（找到合适的不变量）。大部分题目有来源，但还是建议大家先自己思考。

寒假课之后可能会写一个解析。