用余切联合定理证明第 17 届 XMO 几何题

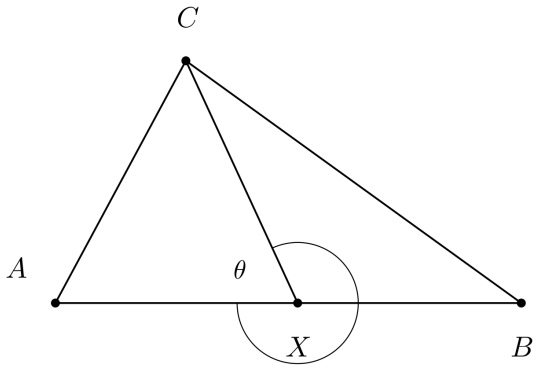
2024-12-30　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4e3e33008c2953b7

余切联合定理：

在 $\triangle ABC$ 中，点 X 在边 AB 上，且 $\dfrac{AX}{XB}=\dfrac{m}{n}$，$\angle AXC=\theta$. 则

$(m+n)\cot\theta=m\cot B-n\cot A.$



解答（PDF 中已展开）

证明：

过 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H，不妨设 $AH=m-x$，$HX=x$，$HB=n$. 于是 $\cot\theta=\dfrac{x}{CH}$，$\cot B=\dfrac{n+x}{CH}$，$\cot A=\dfrac{m-x}{CH}$. 只需证明：

$(m+n)x=m(n+x)-n(m-x).$

显然成立，证毕.

注：

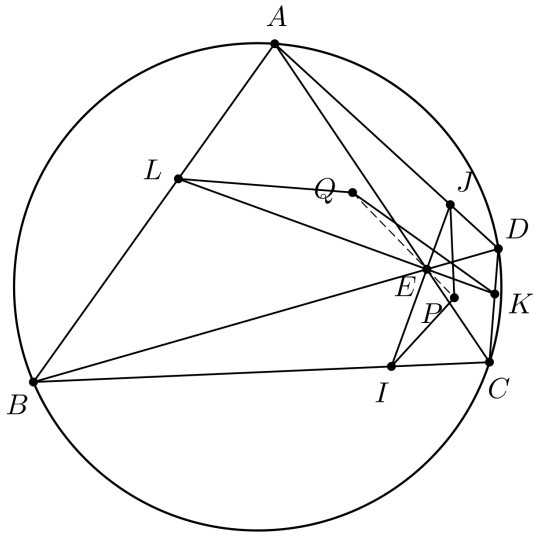
点 X 可在延长线上，此时 $\dfrac{AX}{XB}$ 为有向线段之比.

下面我们用余切联合定理来证明第 17 届 XMO 的几何题.

题目：

如图，圆内接四边形 $ABCD$ 中，AB 与 CD 不平行，DA 与 BC 不平行. 设 AC 与 BD 交于点 E，$\angle AEB$ 的平分线分别交 AB、CD 于点 L、K，$\angle AED$ 的平分线分别交 DA、BC 于点

J、I. 点 Q 满足 $QL \perp CD$，$QK \perp AB$. 点 P 满足 $PJ \perp BC$，$PI \perp AD$.
求证：P、E、Q 三点共线.



解答（PDF 中已展开）

分析：

本题无论是圆，还是角平分线、垂线的条件，都与角度关系很大，所以首选导角.

先设出几个基本角度. 对于角平分线 LEK，其出现在相似的 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDE$ 中，因此设 $\angle BAE$，$\angle ABE$ 为两个基本角度比较合适，由此也能表示出 $\angle ALK$ 和 $\angle DKL$，从而用上垂直条件. 角平分线 IEJ 同理.

再考虑如何证明 PEQ 三点共线，仍然考虑导角进行证明. “对顶角” 相等、“邻补角 “互补等是常用方法. 在本题中，注意到角平分线的垂直，可以通过 $\angle QEL + \angle PEI = 90^\circ$ 来证明三点共线. 而这两个角则可以很方便地用余切联合定理表示.

此外，在证明过程中，可以发现 $\triangle QLK$ 和 $\triangle PIJ$ 均为等腰三角形，从而大大简化计算.

证明：

引理：在 $\triangle ABC$ 中，$AC = BC$，点 X 在边 AB 上. 则

$\cot \angle AXB = \frac{AX-XB}{AX+XB} \cot A$.

即为余切联合定理对于等腰三角形的特殊情况，证明略.

回到原题. 设 $\angle EAB = x$，$\angle EBA = y$，$\angle EDA = z$，$\angle EAD = w$.

则

$$\begin{aligned}\angle QLK =&90^\circ - \angle EKD\\ =&90^\circ - \angle ECD - \frac{\angle CED}{2}\\ =&90^\circ - y - \frac{180^\circ - x - y}{2}\\ =&\frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

同理 $\angle QKL = \dfrac{x-y}{2} = \angle QLK$.

由 $\triangle ABE \sim \triangle DCE$，且角平分线 EL 和 EK 为相似对应线段知：

$\frac{EL}{EK} = \frac{EA}{EB} = \frac{\sin z}{\sin w}$.

在 $\triangle QLK$ 中，由引理知：

$$\begin{aligned}&\cot\angle QEL\\ =&\frac{EL-EK}{EL+EK}\cdot\cot\angle QLK\\ =&\frac{\sin z-\sin w}{\sin z+\sin w}\cdot\cot\frac{x-y}{2}\\ =&\tan\frac{z-w}{2}\cdot\cot\frac{z+w}{2}\cdot\cot\frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

同理

$\cot\angle PEI = \tan\frac{x-y}{2}\cdot\cot\frac{x+y}{2}\cdot\cot\frac{z-w}{2}$.

于是

$$\begin{aligned}&\cot\angle QEL\cdot\cot\angle PEI\\ =&\cot\frac{z+w}{2}\cdot\cot\frac{x+y}{2}\\ =&1\end{aligned}$$

即 $\angle QEL + \angle PEI = 90^\circ$，从而 PEQ 三点共线，证毕.