最近做的一些代数原创题

2026-09-07　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_4f0dfa9b8d128b5f

这是近期在数之谜上做的一些原创题，其中最后两题为我几年前发的原创题，最近补上了解答。晚上用 2022 年高联 A1 卷几何的向量证法 & 我做的一个手稿转录 skill 对手稿进行了转录，顺便给 skill 加了个转 markdown 格式的功能。将转录好的解答一并发出来，原手稿可以在数之谜对应题目评论区找到。

个人认为，虽然 AI 改变了数学研究和数学教育，但作为竞赛教练，更加应该坚持自己做题的习惯，保持手感和解题能力。

第一题（数之谜原创代数 692）

题目

设 n 是正整数，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是非负实数．证明：

$\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{2}{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k^2)} \geq 2.$

1. 对任意 $\alpha \geq 1$，

$\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k^{\alpha})} \geq 1.$

思路

反复使用 $(1-u)(1-v) \geq 1-u-v$，可得 $\prod(1-u_k) \geq 1-\sum u_k$．第一问把 $\frac{1}{1+x^2}$ 放缩为 $1-\frac{x}{2}$；第二问在 $0 \leq x \leq 1$ 时利用 $x^{\alpha} \leq x$．若变量和已经达到右端常数，则结论直接成立．

解答（PDF 中已展开）

证明

对 $0 \leq u_k \leq 1$，有

$\prod_{k=1}^{n}(1-u_k) \geq 1-\sum_{k=1}^{n} u_k.$

这是由 $(1-u)(1-v) \geq 1-u-v$ 反复应用得到的．

对于第一问，若 $\sum_{k=1}^{n} x_k \geq 2$，则结论显然成立．以下设 $\sum_{k=1}^{n} x_k < 2$，于是 $0 \leq x_k < 2$．对任意 $x \geq 0$，

$\frac{1}{1+x^2} - \left(1-\frac{x}{2}\right) = \frac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)} \geq 0.$

因此

$$\begin{aligned}\frac{2}{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k^2)} &= 2\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k^2}\\ &\geq 2\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x_k}{2}\right)\\ &\geq 2\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{2}\right)\\ &= 2-\sum_{k=1}^{n}x_k.\end{aligned}$$

故

$\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{2}{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k^2)}\geq 2.$

对于第二问，若 $\sum_{k=1}^{n}x_k\geq 1$，则结论成立．以下设 $\sum_{k=1}^{n}x_k<1$，于是 $0\leq x_k<1$．由 $\alpha\geq 1$ 得 $x_k^{\alpha}\leq x_k$，且

$\frac{1}{1+x_k^{\alpha}}\geq 1-x_k^{\alpha}\geq 1-x_k.$

从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k^{\alpha})} &= \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x_k^{\alpha}}\\ &\geq \prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\\ &\geq 1-\sum_{k=1}^{n}x_k.\end{aligned}$$

故

$\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+x_k^{\alpha})}\geq 1.$

第三题（数之谜原创代数 684）

题目

给定整数 $n\geq 4$．设非负实数

$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$

满足

$a_1+a_2+\cdots+a_n\leq 1,\qquad a_1\leq a_2+a_3+\cdots+a_n.$

求最小的实数 λ，使得总有

$\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})^2-\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ia_j\leq\lambda(a_1+a_2),$

其中 $a_{n+1}=a_1$.

思路

先取 $a_1=a_2=\frac{1}{2}$、其余为 0，得到 $\lambda\geq\frac{5}{4}$．为证明上界，记 $S=\sum a_i$，先证明循环相邻乘积和 $\sum a_ia_{i+1}\leq\frac{S^2}{4}$，从而把左端压到 $\frac{5}{2}\sum a_i^2$．再利用单调性 $a_k\leq a_2$ 以及 $a_1\leq\frac{1}{2}$ 完成估计.

解答（PDF 中已展开）

解

取

$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = \cdots = a_n = 0.$

此时题设条件成立，且左端为 $\frac{5}{4}$，而 $a_1 + a_2 = 1$，故

$\lambda \geq \frac{5}{4}$.

下面证明 $\lambda = \frac{5}{4}$ 总是可行. 记

$S = \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1.$

由 $a_1 \leq S - a_1$ 得

$a_1 \leq \frac{S}{2} \leq \frac{1}{2}$.

先证

$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq \frac{S^2}{4}$.

若 n 为偶数，令

$X = a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1}, \qquad Y = a_2 + a_4 + \cdots + a_n.$

每个循环相邻乘积都出现在 XY 的展开式中，因此

$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq XY \leq \frac{(X+Y)^2}{4} = \frac{S^2}{4}$.

若 n 为奇数，令

$X = a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-2}, \qquad Y = a_2 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$

XY 的展开式包含除 $a_{n-1}a_n$ 外的全部循环相邻乘积，并额外包含 $a_{n-2}a_n$. 由于 $a_{n-2} \geq a_{n-1}$，仍有

$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq XY \leq \frac{S^2}{4}$.

记题目左端为 L. 由

$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \frac{1}{2}\left(S^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right),$

可得

$$\begin{aligned} L &= 2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} - \frac{1}{2}\left(S^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \\ &= \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} - \frac{S^2}{2} \\ &\leq \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2. \end{aligned}$$

又因为 $a_k \leq a_2$ 对 $k \geq 2$ 成立，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 &\le a_1^2 + a_2 \sum_{k=2}^{n} a_k \\ &= a_1^2 + a_2(S - a_1) \\ &\le a_1^2 + a_2(1 - a_1).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}L - \frac{5}{4}(a_1 + a_2) &\le \frac{5}{4}\left(2a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2 - a_1\right) \\ &= \frac{5}{4}(a_1 - a_2)(2a_1 - 1) \\ &\le 0.\end{aligned}$$

故总有 $L \le \frac{5}{4}(a_1 + a_2)$，结合下界例子，最小值为

$$\boxed{\lambda = \frac{5}{4}}.$$

第二题（数之谜原创代数 678）

题目

给定整数 $n \ge 2$. 设非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$

求

$\sum_{i=1}^{n} (a_i + 1) \min\{a_i, a_{i+1}\}$

的最大值，其中 $a_{n+1} = a_1$.

思路

设 $M = \max a_i$、$m = \min a_i$，并用循环总变差 $t = \frac{1}{2}\sum |a_i - a_{i+1}|$ 控制 $M - m$. 另一方面，$\sum \min\{a_i, a_{i+1}\} = 1 - t$. 于是原式只需估计成 $(M+1)(1-t)$，再用 $M \le t + \frac{1}{n}$ 即可.

解答（PDF 中已展开）

解

令

$M = \max_{1 \le i \le n} a_i, \qquad m = \min_{1 \le i \le n} a_i, \qquad t = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i+1}|.$

沿圆周从一个最小项走到一个最大项，再沿另一条弧返回最小项，两段总变差都至少为 $M - m$，故

$\sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i+1}| \ge 2(M - m), \qquad t \ge M - m.$

又因 $m \le \frac{1}{n}$，所以

$M \le t + m \le t + \frac{1}{n}.$

同时，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\min\{a_i,a_{i+1}\} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+a_{i+1}-|a_i-a_{i+1}|\right)\\ &= 1-t.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+1)\min\{a_i,a_{i+1}\} &\le (M+1)(1-t)\\ &\le \left(t+1+\frac{1}{n}\right)(1-t)\\ &= 1+\frac{1}{n}-\frac{t}{n}-t^2\\ &\le 1+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

当 $a_1=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时取到等号. 故最大值为

$\boxed{1+\dfrac{1}{n}}$.

第六题（ZZS 一试模拟）

题目

设 $n\ge 4$，$a_1,a_2,\ldots,a_n>0$，并记

$S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i \qquad (1\le k\le n), \qquad S_n=S.$

解答（PDF 中已展开）

证明

$$\begin{aligned}&n^6(n+1)^4S^2\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_kS_k)^4}{a_{k+1}a_{k+2}}\\ &\qquad\ge 64\left(\sum_{k=1}^{n}S_k\sum_{k=1}^{n}ka_k\right)^4,\end{aligned}$$

其中下标按模 n 理解，即 $a_{n+1}=a_1$，$a_{n+2}=a_2$.

思路

先把右端的两个和相乘, 用 $\sum S_k+\sum ka_k=(n+1)S$ 得到统一上界. 左端的循环分式和用 Hölder 不等式处理，再分别估计 $\sum a_kS_k$ 与 $\sum(a_{k+1}a_{k+2})^{1/3}$. 最后两边都化成 $(n+1)^8S^8$ 的倍数，条件 $n\ge 4$ 恰好完成比较.

证明

记

$A=\sum_{k=1}^{n}S_k, \qquad B=\sum_{k=1}^{n}ka_k.$

由于

$\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k,$

故

$A+B=(n+1)S.$

由 AM-GM，

$AB \le \frac{(A+B)^2}{4} = \frac{(n+1)^2S^2}{4}.$

另一方面，由 Hölder 不等式，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_kS_k)^4}{a_{k+1}a_{k+2}} \ge \left(\sum_{k=1}^{n} a_kS_k\right)^4 \times \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1}a_{k+2})^{1/3}\right)^{-3}.$$

先估计分子. 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_kS_k &= \frac{1}{2}\left(S^2+\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\\ &\ge \frac{1}{2}\left(S^2+\frac{S^2}{n}\right)\\ &= \frac{n+1}{2n}S^2.\end{aligned}$$

再估计分母. 由 AM-GM 及幂平均不等式，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}a_{k+2})^{1/3}\right)^3 &\le \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{k+1}+a_{k+2}}{2}\right)^{2/3}\right)^3\\ &\le n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}+a_{k+2}}{2}\right)^2\\ &= nS^2.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_kS_k)^4}{a_{k+1}a_{k+2}} &\ge \frac{\left(\frac{n+1}{2n}S^2\right)^4}{nS^2}\\ &= \frac{(n+1)^4S^6}{16n^5}.\end{aligned}$$

因此左端满足

$$\begin{aligned}&n^6(n+1)^4S^2\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_kS_k)^4}{a_{k+1}a_{k+2}}\\ &\ge \frac{n}{16}(n+1)^8S^8.\end{aligned}$$

而右端满足

$$\begin{aligned}64(AB)^4 &\le 64\left(\frac{(n+1)^2S^2}{4}\right)^4\\ &= \frac{1}{4}(n+1)^8S^8.\end{aligned}$$

由于 $n \geq 4$，有 $\frac{n}{16} \geq \frac{1}{4}$，故左端不小于右端．命题得证.

第四题（数之谜原创代数 180）

题目

设 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ 为正实数．对 $1 \leq k \leq n$，记

$S_k = \sum_{i=1}^{k} x_i, \qquad T_k = \sum_{i=1}^{k} y_i,$

并定义

$r_k = \max\left(\{j \mid T_j \leq S_k\} \cup \{0\}\right).$

求最小常数 C，使得恒有

$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{r_k} \frac{x_{k+1} y_j}{S_n^2 + S_{k+1} T_j} \leq C.$

思路

同时按同一比例缩放全部 x_i, y_i，不等式保持不变，因此可令 $S_n = 1$．把每一项看成矩形 $[S_k, S_{k+1}] \times [T_{j-1}, T_j]$ 的面积乘以函数 $\frac{1}{1+st}$ 的一个下端估计，这些矩形互不相交并落在三角形 $0 \leq t \leq s \leq 1$ 中．上界由二重积分得到，而取 $x_i = y_i = 1$ 时原和式成为同一积分的黎曼和，从而常数最优.

解答（PDF 中已展开）

解

把所有 x_i, y_i 同时乘以同一正数，r_k 不变，且每一分式的分子、分母同时乘以该正数的平方．故不妨设

$S_n = 1.$

令 $T_0 = 0$．对 $1 \leq k \leq n-1$、$1 \leq j \leq r_k$，定义矩形

$R_{k,j} = [S_k, S_{k+1}] \times [T_{j-1}, T_j].$

由 $j \leq r_k$ 知 $T_j \leq S_k$．因此对任意 $(s,t) \in R_{k,j}$，有

$0 \leq t \leq T_j \leq S_k \leq s \leq S_{k+1} \leq 1.$

故所有这些矩形两两内部不交，并都包含在

$D = \{(s,t) \mid 0 \leq t \leq s \leq 1\}$

中．又 $\operatorname{area}(R_{k,j}) = x_{k+1} y_j$，且在 $R_{k,j}$ 上有 $st \leq S_{k+1} T_j$，于是

$\frac{x_{k+1} y_j}{1 + S_{k+1} T_j} \leq \iint_{R_{k,j}} \frac{ds\,dt}{1+st}.$

求和得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{r_k}\frac{x_{k+1}y_j}{1+S_{k+1}T_j} &\le \iint_D \frac{ds\,dt}{1+st}\\ &= \int_0^1\int_0^s \frac{dt\,ds}{1+st}\\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+s^2)}{s}\,ds\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du\\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^2}\\ &= \frac{\pi^2}{24}.\end{aligned}$$

所以 $C \le \frac{\pi^2}{24}$.

另一方面，取

$x_1 = \cdots = x_n = y_1 = \cdots = y_n = 1.$

此时 $S_k = T_k = k$、$r_k = k$，原和式为

$$\begin{aligned}A_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n^2+(k+1)j}\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{1+\frac{k+1}{n}\frac{j}{n}}.\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，这是区域 D 上函数 $\frac{1}{1+st}$ 的黎曼和，因此

$\lim_{n\to\infty} A_n = \iint_D \frac{ds\,dt}{1+st} = \frac{\pi^2}{24}$.

故任何更小的常数都不成立．因此

$$\boxed{C_{\min} = \frac{\pi^2}{24}}.$$

第五题（数之谜原创代数 27）

题目

设 $n \ge 2$，正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足

$\sum_{i=1}^{n} a_i = n-1.$

解答（PDF 中已展开）

证明

$\sqrt[n]{\frac{n-1}{a_1a_2\cdots a_n}} \ge 4\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n(n-1)}}$.

思路

令 $x_i = 2a_i$，把目标化为二次和与乘积的混合估计．取最大的 $x_n = (n-1)t$，再以其余 $n-1$ 个数的几何平均数 g 为中心，用一个对数型估计控制 $\sum(x_i-g)^2$．随后用加权 AM-GM 把问题压

缩为关于 t 的单变量不等式，最后由导数判断其最大值在 $t=1$ 取得.

证明

令

$x_i = 2a_i \qquad (1 \le i \le n).$

则

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2(n-1).$

将原不等式平方并整理，等价于证明

$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{2/n} \le n(n-1)^{1+2/n}.$

不妨设 $x_n = \max_i x_i$，并写成

$x_n = (n-1)t.$

由于最大值不小于平均值，且其余各项均为正数，

$\frac{2}{n} \le t < 2, \qquad \sum_{i=1}^{n-1} x_i = (2-t)(n-1).$

令

$g = \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i\right)^{1/(n-1)}.$

于是 $g \le x_n = (n-1)t$. 先用如下估计：若 $0 < x, y \le M$，则

$(x-y)^2 \le 2M\left(x - y - y\ln\frac{x}{y}\right).$

事实上，当 $x \ge y$ 时，

$$\begin{aligned} x - y - y\ln\frac{x}{y} &= \int_y^x \frac{u-y}{u}\,du \\ &\ge \frac{1}{M}\int_y^x (u-y)\,du \\ &= \frac{(x-y)^2}{2M}, \end{aligned}$$

而 $x \le y$ 时同理.

在上式中取 $M = (n-1)t$、$x = x_i$、$y = g$，并对 $i = 1, \dots, n-1$ 求和. 由

$\sum_{i=1}^{n-1} \ln\frac{x_i}{g} = 0$

可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - g)^2 &\le 2(n-1)t\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_i - g - g\ln\frac{x_i}{g}\right) \\ &= 2(n-1)^2 t(2-t-g). \end{aligned}$$

展开左端，得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 &\le 2(n-1)^2 t(2-t-g) \\ &\quad + 2(n-1)g(2-t) - (n-1)g^2. \end{aligned}$$

记

$A=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n(n-1)}$.

由于 $x_n=(n-1)t$，上式给出

$$\begin{aligned}nA+2(n-1)tg&\le 4+(n-2)t(4-t)-(g+t-2)^2\\&\le 4+(n-2)t(4-t).\end{aligned}$$

由加权 AM-GM，

$$\begin{aligned}A^n(tg)^{2(n-1)}&\le\left(\frac{nA+2(n-1)tg}{3n-2}\right)^{3n-2}\\&\le\left(\frac{4+(n-2)t(4-t)}{3n-2}\right)^{3n-2}.\end{aligned}$$

另一方面，待证不等式等价于

$A(tg)^{2(n-1)/n}t^{-2(n-2)/n}\le 1$.

因此只需证明

$\frac{4+(n-2)t(4-t)}{3n-2}\le t^{\,2(n-2)/(3n-2)}$.

令

$f(t)=\ln\frac{4+(n-2)t(4-t)}{3n-2}-\frac{2(n-2)}{3n-2}\ln t$.

当 $n=2$ 时 $f(t)\equiv 0$. 当 $n>2$ 时，

$f'(t)=-\frac{4(n-2)(t-1)(nt-2)}{(3n-2)t\,[4+(n-2)t(4-t)]}$.

因 $\frac{2}{n}\le t<2$，故 f 在 $[\frac{2}{n},1]$ 上递增，在 $[1,2)$ 上递减，且 $f(1)=0$. 于是 $f(t)\le 0$，所需单变量不等式成立，原不等式得证.

等号可在

$(a_1,\dots,a_n)=\left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)$

及其任意排列处取得.